

CNC 2024 - Physique I : Filière MP

Corrigé Proposé par M. JENKAL RACHID.CPGE - Beni Mellal

Date : 25/05/2024

Partie 1 (Etude d'un pendule simple : Barème 4 /20)

1.1. Les forces appliquées au point M, sont :

- $\vec{P}(M)$: Son poids ;
- $\vec{F}(M)$: Tension du fil.

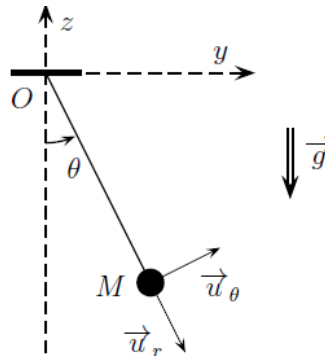


Figure 1 : Pendule simple @Chtoukaphysique

Les projections de ces forces dans la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ donnent :

$$\vec{P} = P (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta) = mg (\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{F} = -F \vec{u}_r$$

1.2. L'expression de la vitesse $\vec{v}(M/R_T)$ et de l'accélération $\vec{a}(M/R_T)$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

$$\vec{v}(M/R_T) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{R_T} = L\dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a}(M/R_T) = \left. \frac{d\vec{v}(M/R_T)}{dt} \right|_{R_T} = -L\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + L\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

1.3. L'équation différentielle vérifiée par θ :

On applique PFD au point M dans le référentiel \mathcal{R}_T supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{F} = m \vec{a}(M/R_T)$$

On projette cette relation sur \vec{u}_θ , on obtient :

$$-mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$$

Soit

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

1.4. On se place dans l'hypothèse des petits mouvements où l'angle θ reste petit ($|\theta| \ll 1 \text{ rad}$):

$$\sin \theta \approx \theta$$

Ce qui donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

Que l'on peut réécrire :

$$\ddot{\theta} + w^2 \theta = 0$$

Où : $w = \sqrt{\frac{g}{L}}$: Pulsation propre en (rad/s) ;

La solution de cette équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(wt + \varphi)$$

Avec :

θ_m et φ sont des constantes à déterminer par des conditions initiales ;

θ_m : Amplitude des oscillations en (rad) ;

φ : phase à $t = 0$ en (rad) ;

À $t = 0$, on a :

$$\theta(t = 0) = \theta_m \cos \varphi = \theta_0 ;$$

$$\dot{\theta}(t = 0) = -\theta_m w \sin \varphi = 0 ;$$

Alors :

$$\varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi$$

Puisque $\cos \varphi > 0$, alors :

$$\varphi = 0$$

Par conséquent :

$$\theta_m = \theta_0$$

Finalement :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(wt)$$

Le mouvement est périodique de période :

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Partie 2 (Gravitation et pesanteur de la terre sphérique)

2.1. Champ gravitationnel de la terre

2.1.1. L'expression de la force de gravitation \vec{F}_g exercée par la Terre sur l'objet M est :

$$\vec{F}_g = -G \frac{mM_T}{OM^3} \cdot \vec{OM} \approx -G \frac{mM_T}{R^3} \cdot \vec{OM}$$

car : $\|\vec{OM}\| = OM \approx R$

2.2.2. L'expression du champ gravitationnel de la Terre au point M est donnée par :

$$\vec{g}_0 = \frac{\vec{F}_g}{m} = -\frac{GM_T}{R^3} \cdot \vec{OM}$$

2.2. Lois de composition des vitesses et des accélérations

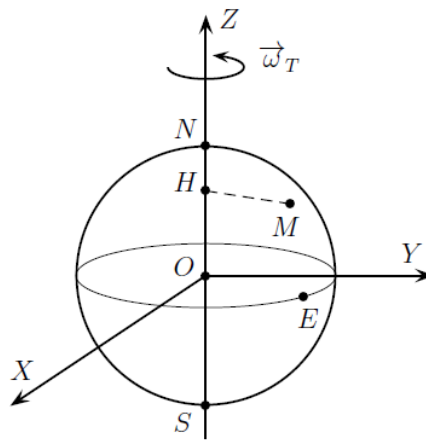


Figure 2 : Terre sphérique en rotation autour de l'axe des pôles @Chtoukaphysique

2.2.1. Le référentiel \mathcal{R}_T n'est pas galiléen car il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen (il est en rotation uniforme par rapport au référentiel \mathcal{R}_G galiléen.)

2.2.2. L'expression de la vitesse du point M dans le référentiel absolu en mettant en évidence une vitesse relative et une vitesse d'entraînement :

On sait que :

$$\vec{v}(M/R_G) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{R_G} = \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_{R_G} + \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{R_G}$$

Or :

$$\left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{R_G} = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{R_T} + \vec{w}_T(\mathcal{R}_T/R_G) \wedge \vec{O'M}$$

D'où

$$\vec{v}(M/R_G) = \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{R_T} + \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_{R_G} + \vec{w}_T \wedge \vec{O'M}$$

Finalement :

$$\vec{v}(M/R_G) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M)$$

Avec :

$$\vec{v}_r(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_T} : \text{Vitesse relative ;}$$

$$\vec{v}_e(M) = \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{R_G} + \vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M} : \text{Vitesse d'entraînement ;}$$

2.2.3. L'accélération du point M dans le référentiel absolu en mettant en évidence une accélération relative, une accélération d'entraînement et une accélération complémentaire dite de Coriolis :

On sait que :

$$\vec{a}(M/R_G) = \left. \frac{d\vec{v}(M/R_G)}{dt} \right|_{R_G} = \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_T} + \left. \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \right|_{R_G} + \vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M} \right) \right|_{R_G}$$

Alors :

$$\vec{a}(M/R_G) = \left. \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{R_G} + \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_T} \right) \right|_{R_G} + \left. \frac{d}{dt} (\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}) \right|_{R_G}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/R_G) &= \left. \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{R_G} + \left. \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right|_{R_T} + \vec{\omega}_T \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_T} \\ &\quad + \left. \frac{d\vec{\omega}_T}{dt} \right|_{R_G} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_T \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_G} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/R_G) &= \left. \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right|_{R_T} + \left. \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} \right|_{R_G} + \vec{\omega}_T \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_T} \\ &\quad + \left. \frac{d\vec{\omega}_T}{dt} \right|_{R_G} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_T \wedge \left(\left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_T} + \vec{\omega}_T \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_G} \right) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/R_G) &= \vec{a}(M/R_T) + \vec{a}(O'/R_G) + \left. \frac{d\vec{\omega}_T}{dt} \right|_{R_G} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ &\quad + \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M/R_T) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\vec{a}(M/R_G) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

Avec :

$$\vec{a}_r(M) = \vec{a}(M/R_T) = \left. \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2} \right|_{R_T} : \text{Accélération relative ;}$$

$$\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O'/R_G) + \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}) : \text{Accélération d'entraînement, telle que : } \left. \frac{d\vec{\omega}_T}{dt} \right|_{R_G} = \vec{0}$$

;

$$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}_T \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{R_T} = 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{v}(M/R_T) : \text{Accélération de Coriolis.}$$

2.2.4 Le point M n'est soumis qu'à la force de gravitation dans \mathcal{R}_G , alors d'après le PFD, on a :

$$\vec{F}_g = m \vec{a}(M/R_G)$$

Soit :

$$\vec{F}_g = m \vec{a}_r(M) + m \vec{a}_e(M) + m \vec{a}_c(M)$$

Ce qui donne :

$$\vec{F}_g - m \vec{a}_e(M) - m \vec{a}_c(M) = m \vec{a}(M/R_T)$$

d'où :

$$\vec{F}_g + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic} = m \vec{a}(M/R_T)$$

Avec :

- $\vec{f}_{ie} = -m \vec{a}_e(M)$: force d'inertie d'entraînement ;

- $\vec{f}_{ic} = -m \vec{a}_c(M)$: force d'inertie de Coriolis .

2.3. Définition du poids d'un corps

2.3.1. La condition d'équilibre en faisant intervenir \vec{F} et \vec{F}_g :

$$\vec{v}(M/R_T) = \vec{0} \text{ et } \vec{a}(M/R_T) = \vec{0}$$

Ce qui donne :


$$\vec{F}_g + \vec{F} + \vec{f}_{ie} = \vec{0}$$

Avec : $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$ car $\vec{v}(M/R_T) = \vec{0}$

2.3.2. L'expression du champ de pesanteur :

À l'équilibre on a :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

 **Rappel** : Le poids est la force opposée à celle qui le maintient en équilibre dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T .

Alors :

$$\vec{P} = -\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{f}_{ie}$$

Soit :

$$\vec{P}(M) = -G \frac{mM_T}{OM^3} \cdot \vec{OM} - m \vec{a}(O'/R_G) - m \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \vec{OO}')$$

Or :

$$\vec{v}(O'/R_G) = \left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right|_{R_G} = \left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right|_{R_T} + \vec{\omega}_T \wedge \vec{OO}'$$

Puisque O' est fixe dans \mathcal{R}_T , alors : $\left. \frac{d\vec{OO}'}{dt} \right|_{R_T} = \vec{0}$

Donc :

$$\vec{a}(O'/R_G) = \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \vec{OO}')$$

Ce qui donne :

$$\vec{P}(M) = -G \frac{mM_T}{OM^3} \cdot \vec{OM} - m\vec{w}_T \wedge (\vec{w}_T \wedge \vec{OO'}) - m\vec{w}_T \wedge (\vec{w}_T \wedge (\vec{O'O} + \vec{OM}))$$

Soit :

$$\vec{P}(M) = -G \frac{mM_T}{R^3} \cdot \vec{OM} - m\vec{w}_T \wedge (\vec{w}_T \wedge (\vec{OH} + \vec{HM}))$$

Soit :

$$\vec{P}(M) = -G \frac{mM_T}{OM^3} \cdot \vec{OM} - m\vec{w}_T \wedge (\vec{w}_T \wedge (\vec{OH} + \vec{HM}))$$

Comme :

$$(\vec{w}_T \wedge \vec{OH}) = \vec{0}$$

Alors :

$$\vec{P}(M) = -G \frac{mM_T}{OM^3} \cdot \vec{OM} - m\vec{w}_T \wedge (\vec{w}_T \wedge \vec{HM})$$

On sait que :

$$\vec{w}_T \wedge (\vec{w}_T \wedge \vec{HM}) = (\vec{w}_T \cdot \vec{HM}) \vec{w}_T - (\vec{w}_T \cdot \vec{w}_T) \vec{HM} = -w_T^2 \vec{HM}$$

Par conséquent :

$$\vec{P}(M) = -G \frac{mM_T}{OM^3} \cdot \vec{OM} + mw_T^2 \vec{HM}$$

Finalement

$$\vec{g}(M) = -\frac{G.M_T}{OM^3} \cdot \vec{OM} + w_T^2 \vec{HM}$$

2.3.3. Application numérique :

$$\Delta g = \|g(N)\| - \|g(E)\| = w_T^2 \cdot R$$

AN .

$$\Delta g = \|g(N)\| - \|g(E)\| = 3,41 \cdot 10^{-2} m \cdot s^{-2} = 34,1 \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-2}$$

✎ **Explication :** En réalité $\Delta g = 52 \cdot 10^{-3} m \cdot s^{-2}$. Cet écart est dû au fait que la terre n'est pas exactement sphérique (la terre est ovale et aplatie suivant les pôles : $ON < OE$) .

Partie 3 (Étude de la chute d'un corps : Déviation vers l'Est)

3.1. Équation du mouvement

3.1.1. On applique le PDF à la bille M, en chute libre, dans le référentiel \mathcal{R}_T non galiléen ;

$$\vec{P} + \vec{f}_{ic} = m\vec{a}(M/R_T)$$

✎ **Remarque :** Attention à ne pas compter 2 fois la force d'inertie d'entraînement. Cette force est déjà comptée dans le poids \vec{P} .

Ce qui donne :

$$m\vec{g} - 2m\vec{\omega}_T \wedge \vec{v} (M/R_T) = m\vec{a} (M/R_T)$$

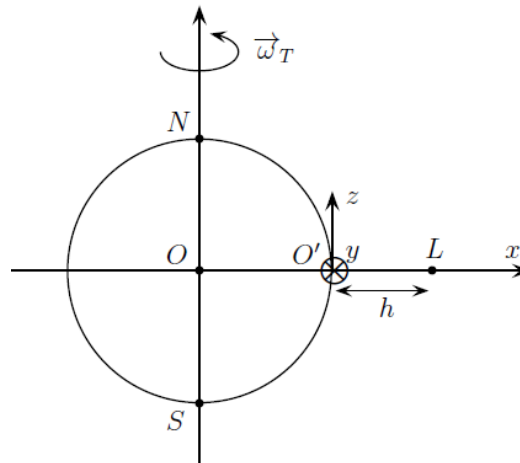


Figure 3 : Expérience de chute dans le référentiel terrestre @Chtoukaphysique

3.1.2. Les trois équations différentielles vérifiées par les coordonnées (x,y,z) sont :

En projetant la relation précédente sur les trois axes (Ox) , (Oy) et (Oz) , nous obtenons:

$$m \begin{pmatrix} -g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_T \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

En simplifiant par m :

$$\begin{cases} -g + 2\omega_T \dot{y} = \ddot{x}; (1) \\ -2\omega_T \dot{x} = \ddot{y}; (2) \\ 0 = \ddot{z}; (3) \end{cases}$$

3.2. Déviation vers l'Est

3.2.1 Résolution en tenant compte des approximations données :

Par intégration, on obtient :

L'équation (3) $\rightarrow \dot{z} = Cte = \dot{z}_0 = 0 \rightarrow z = Cte = z_0 = 0$;

L'équation (2) $\rightarrow \dot{y} = -2\omega_T x + C_1$; $\dot{y}(t=0) = -2\omega_T x_0 + C_1 \rightarrow C_1 = 2\omega_T h$;

L'équation (2) $\rightarrow \dot{y} = -2\omega_T (x - h)$.

On remplace dans l'équation (1) et on obtient :

$$\ddot{x} = -g + (2\omega_T)^2 (h - x) \approx -g$$

(Approximations : En négligeant tous les termes proportionnelle à ω_T^2 : $(2\omega_T)^2 (h - x) \ll g$) .
d'où :

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h; \\ y(t) = \frac{g \cdot \omega_T}{3}t^3; \\ z(t) = 0; \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} x(t) = at^2 + h; \\ y(t) = bt^3; \\ z(t) = 0; \end{cases}$$

Avec :

$$\begin{cases} a = -\frac{g}{2}; \\ b = \frac{g \cdot w_T}{3}; \end{cases}$$

3.2.2. Puisque $y(t) = \frac{g \cdot w_T}{3} t^3 > 0$, Alors la déviation s'effectue vers l'Est .
Déterminons t_1 le temps de chute :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Alors :

$$y_1 = \frac{g \cdot w_T}{3} \cdot \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{8}{9g}} \cdot w_T \cdot h^{\frac{3}{2}}$$

Application numérique :

$$y_1 = 6,2 \cdot 10^{-2} m = 6,2 cm$$

Partie 4 (Gravimètre optique à chute libre)

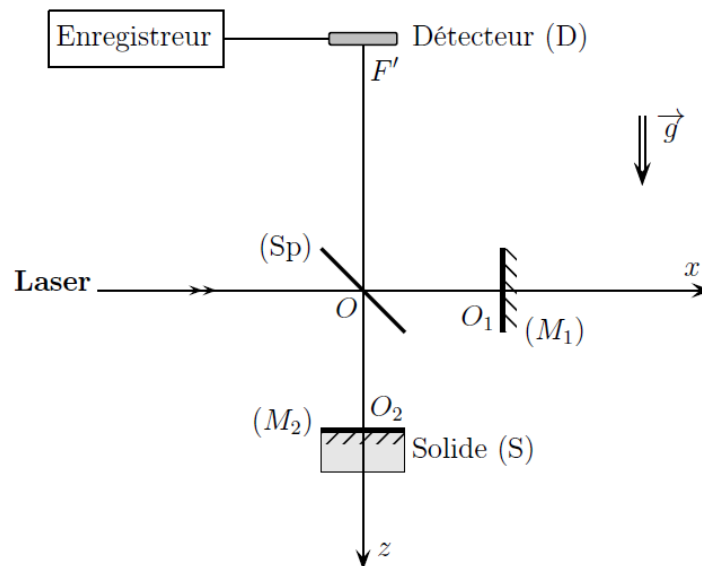


Figure 4 : Interféromètre de Michelson @Chtoukaphysique

4.1 Équation horaire du mouvement

4.1.1. L'intérêt de placer l'interféromètre sous vide est de pouvoir négliger les forces de frottement avec l'air et l'indice de réfraction devient : $n = 1$;

4.1.2. On applique PFD au mobile (M_2) dans le référentiel supposé galiléen et on obtient ;

$$\vec{P} = m \vec{a} \rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

Ce qui donne :

$$a_z = g$$

Par intégration (avec $z(t=0) = \ell_1$ et $\dot{z}(t=0) = 0$), on obtient :

$$z(t) = \frac{1}{2} g t^2 + \ell_1$$

4.2 Mesure de la gravité par interférométrie optique

4.2.1. Les deux ondes doivent être :

- Cohérentes : Le déphasage $\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ doit être indépendant du temps ;
- Synchrones : $w_1 = w_2$

4.2.2. Différence de marche δ des deux faisceaux au point F' en fonction de e est :

On sait que :

$$\delta = (SO + OO_2 + O_2O + OF') - (SO + OO_1 + O_1O + OF')$$

Alors :

$$\delta = 2e$$

4.2.2. L'expression de l'intensité lumineuse E , reçue au point F' , en fonction de e :

L'intensité est donnée par la formule de Fresnel :

$$E = E_1 + E_2 + 2\sqrt{E_1 E_2} \cos(\varphi)$$

Or

$$E_1 = E_2 = \frac{E_0}{2} \text{ et } \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = \frac{4\pi e}{\lambda}$$

Donc :

$$E = E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda}\right) \right)$$

Avec :

$$E_{max} = 2E_0$$

4.2.4. L'expression de l'intensité lumineuse $E(t)$ en fonction du temps :

Comme :

$$e = OO_2 - OO_1 = \frac{1}{2}gt^2 + \ell_1 - \ell_1 = \frac{1}{2}gt^2$$

$$E(t) = E_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi gt^2}{\lambda}\right) \right)$$

4.2.5. Si $E = 0$, alors :

$$\frac{2\pi gt^2}{\lambda} = (2n + 1)\pi$$

Pour $n = 2$, on a $t_2 = 40ms$, alors :

$$g = \frac{5\lambda}{2t_2^2}$$

Application numérique :

$$g = \frac{5 \cdot 633 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot (0.4010^{-3})^2} = 9,9m \cdot s^{-2}$$

Albert Einstein

"Aucun problème ne peut être résolu sans changer le niveau de conscience qui l'a engendré."