

✍️ Concours National Commun(CNC) - Correction Session 2025 : Épreuve de Physique I - MP

Corrigé proposée par : **Pr.JENKAL RACHID**
jenkalrachid.agr@gmail.com
www.chtoukaphysique.com
Classes Préparatoires aux Grandes Écoles
Beni Mellal

-Partie I : Accélérations des électrons

1. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifiée.

On peut considérer le référentiel du laboratoire comme galiléen, car la durée de l'expérience Δt est très négligeable devant la période de révolution de la Terre sur elle-même ($T \approx 24$ h), soit : $\Delta t \ll T$.

2. L'expression du potentiel électrostatique $V(z)$ en point M entre les deux les deux armatures :

D'après l'énoncé, on a l'équation de POISSON :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0.$$

Or $\rho = 0$ et V ne dépend que de z , l'équation devient :

$$\frac{d^2 V(z)}{dz^2} = 0.$$

Par intégration, et en tenant compte les conditions aux limites $V(0) = V_1$ et $V(z = d_0) = V_2$, on obtient :

$$V(z) = V_1 + (V_2 - V_1) \frac{z}{d_0}$$

✍️ L'expression du champ électrostatique entre les armatures :

On sait que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V) = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z \implies \vec{E} = -\frac{V_2 - V_1}{d_0} \vec{e}_z = -\frac{U}{d_0} \vec{e}_z$$

3. L'expression vectorielle de la force de LORENTZ \vec{F}_L

L'électron, de charge $q = -e$, est soumis à la force électrostatique (force de Lorentz sans champ magnétique) :

$$\vec{F}_L = q \vec{E} = -e \left(-\frac{U}{d_0} \vec{e}_z \right) = \frac{eU}{d_0} \vec{e}_z$$

4. Le signe de la tension U :

Pour que les électrons soient accélérés vers les z croissant, il faut que :

$$\frac{eU}{d_0} > 0 \implies U > 0 \implies V_2 > V_1$$

✍️ Remarque :

C'est normal car, le champ électrostatique \vec{E} est toujours dirigé vers les potentiels décroissants ($\vec{F}_L = -e\vec{E}$)

5. Comparaison entre P et F_L : On a :

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{F}_L\|} = \frac{m_e g d_0}{eU} \approx 5,6 \cdot 10^{-16} \ll 1 \implies P \ll F_L$$

Pour vérifier ce résultat, on peut prendre les valeurs suivantes :

$$U = 10 \text{ kV}, \quad d_0 = 10 \text{ cm}, \quad m_e \approx 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}, \quad e \approx 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$$

➡ Donc on peut négliger le poids de l'électron devant la force de LORENTZ.

6. Calculons la vitesse v_0^c de l'électron à l'armature A_2 :

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C) sous forme intégrale à l'électron entre A_1 et A_2 , on obtient :

$$\Delta E_c = W(\vec{F}_L) = \frac{1}{2}mv_0^c{}^2 = eU \implies v_0^c = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

☞ Pour $U = 10\text{kV}$,

$$v_0^c = \sqrt{\frac{2 \times 1.60 \times 10^{-19} \times 10^4}{9.11 \times 10^{-31}}} \approx 5.9 \times 10^7 \text{ m/s}$$

☞ Pour $U = 100\text{kV}$,

$$v_0^c = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^5}{9.11 \times 10^{-31}}} \approx 1.9 \times 10^8 \text{ m/s}$$

☞ Pour $U = 1000\text{kV}$,

$$v_0^c = \sqrt{\frac{2 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 10^6}{9.11 \times 10^{-31}}} \approx 5.9 \times 10^8 \text{ m/s}$$

☞ **Commentaire :**

La vitesse v_0^c de l'électron est comparable à celle de la lumière dans le vide ($c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$).

Pour une tension de $U = 1000 \text{ kV}$, la vitesse obtenue dépasse même cette limite, ce qui est physiquement impossible. Cela met en évidence les limites du modèle classique : il devient alors nécessaire d'utiliser la mécanique relativiste, car le traitement classique n'est plus valable.

-Partie II : Microscopie électronique à balayage

🔗 1. Fabrication d'un faisceau d'électrons

1.1. Explication de l'effet tunnel

L'effet tunnel est un phénomène purement quantique selon lequel une particule peut traverser une barrière de potentiel même si son énergie totale est inférieure à la hauteur de cette barrière. Alors que la mécanique classique interdit une telle traversée.

☞ **Remarque :**

La mécanique quantique la rend possible en raison du caractère ondulatoire de la matière (de la particule). Cette traversée est associée à une probabilité non nulle de présence de la particule de l'autre côté de la barrière, déterminée par la résolution de l'équation de Schrödinger.

1.2. Calcul du champ électrique d'émission E_{\max} :

$$\text{On a : } E_{\max} = \frac{2U_{ep}}{r_0 \ln\left(\frac{4d}{r_0}\right)} \implies \text{AN : } E_{\max} \approx 9.6 \cdot 10^8 \text{ V/m}$$

Avec : $U_{ep} = 4 \text{ kV}$, $r_0 = 1 \mu\text{m}$, $d = 1 \text{ mm}$

1.3. Le signe de V_e l'électrode d'extraction.

Pour que les électrons soit accélérés dans la zone d'accélération, il faut que :

$$U_{eM} < 0 \implies V_e - V_M < 0 \text{ et } V_M = 0 \implies V_e < 0$$

1.4. Calcul du potentiel V_e

$$E_p = qV_e + Cte \text{ et } V_M = 0 \implies Cte = 0 \implies V_e = -\frac{E_p}{e} = -\frac{15 \times 10^3 \times 1.60 \times 10^{-19}}{1.6 \times 10^{-19}} \implies V_e = -15\text{kV}$$

1.5. Le potentiel de la pointe V_p par rapport à la masse est :

$$U_{ep} = V_e - V_p \implies V_p = V_e - U_{ep}$$

AN :

$$V_p = -15 - 4 = -19 \text{ kV}$$

🔗 2. Un vide quasi parfait!

2.1. La densité moléculaire n^* en fonction de T et P :

$$P.V = n.R.T \implies P = \frac{N}{V} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T \implies P = n^* k_B T \implies n^* = \frac{P}{k_B T}$$

2.2. L'expression du Libre parcours moyen l en fonction de T et P :

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 n^*} \implies \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 P}$$

2.3. Applications numériques :

☞ À la pression atmosphérique ($P = 1 \text{ atm} \approx 10^3 \text{ mbar}$) et $T = 300 \text{ K}$:

$$n^* = \frac{1 \times 10^5}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \approx 2.4 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}, \quad l = \frac{6.7 \times 10^{-2}}{10^3} = 6.7 \times 10^{-5} \text{ mm}$$

☞ À basse pression ($P = 10^{-6} \text{ mbar}$) et $T = 300 \text{ K}$:

$$n^* = \frac{1 \times 10^{-4}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \approx 2.4 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}, \quad l = \frac{6.7 \times 10^{-2}}{10^{-6}} = 6.7 \times 10^4 \text{ mm}$$

☞ À ultra-vide ($P = 10^{-10} \text{ mbar}$) et $T = 300 \text{ K}$:

$$n^* = \frac{1 \times 10^{-8}}{1.38 \times 10^{-23} \times 300} \approx 2.4 \times 10^{12} \text{ m}^{-3}, \quad l = \frac{6.7 \times 10^{-2}}{10^{-10}} = 6.7 \times 10^8 \text{ mm}$$

➡ Commentaire :

Plus la pression diminue, plus la densité moléculaire n^* diminue, et plus le libre parcours moyen l augmente. Autrement dit, les particules peuvent parcourir de plus grandes distances sans collision. Ces conditions valident l'hypothèse du gaz parfait, car les interactions entre particules deviennent négligeables.

2.4. Nécessité d'un vide quasi-parfait :

un vide quasi-parfait est réalisé dans l'enceinte du microscope électronique afin de réduire au maximum les collisions entre les électrons du faisceau et les molécules d'air. Ce qui garantit une image précise et un bon fonctionnement du microscope électronique.

2.5. Blindage de l'enceinte :

L'enceinte du microscope électronique doit être blindée pour protéger le faisceau électronique des champs électriques et magnétiques extérieurs. Ces champs pourraient dévier les électrons et perturber leur trajectoire, ce qui diminue et affecte la qualité de l'image.

🔗 3. Fonctionnement d'une lentille magnétique

3.1. Direction du champ magnétique \vec{B} (O') créée par la bobine au point O' de son axe :

Les plans $(\Pi)_1^* \equiv (O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(\Pi)_2^* \equiv (O, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ sont deux plans d'antisymétrie de la distribution de courant.

Par conséquent, Le champ \vec{B} (O') est porté par le vecteur unitaire \vec{e}_z .

$$\vec{B} (O') = B_z (O') \vec{e}_z$$

3.2. L'expression du champ magnétique \vec{B} (O') :

$$\vec{B} (O') = B(O') \vec{e}_3 \implies \vec{B} (O') = N \cdot B_{\text{spire}}(O') \vec{e}_3$$

$$dB_{\text{spire}}(O') = d\vec{B}_{\text{spire}}(O') \cdot \vec{e}_3 = \frac{\mu_0}{4\pi PO^3} [I \vec{dl} \wedge \vec{PO}'] \cdot \vec{e}_3 \quad \text{avec : } \vec{PO}' = -a\vec{e}_r + z\vec{e}_3 \text{ (} P \in \text{spire) et } \vec{dl} = ad\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\implies dB_{\text{spire}}(O') = \frac{\mu_0 I a^2 d\varphi}{4\pi PO^3} \implies B_{\text{spire}}(O') = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi (a^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \implies \vec{B}(O') = \frac{N\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_3$$

3.3. Allure du champ magnétique B(z) en fonction de z :

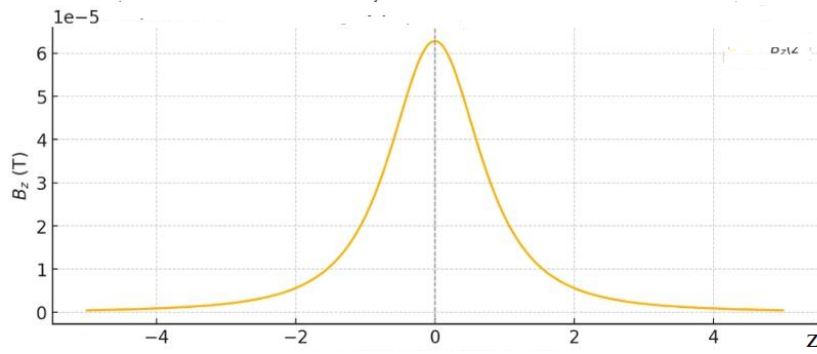


FIGURE 1 – Allure du champ B en fonction de z @Chtoukaphysique

► La fonction B(z) est paire, elle est intense (maximale) au point O (à z=0) : $B_{max} = \frac{N\mu_0 I}{2.a}$

3.4. Allure des lignes du champ magnétique en précisant leur sens :

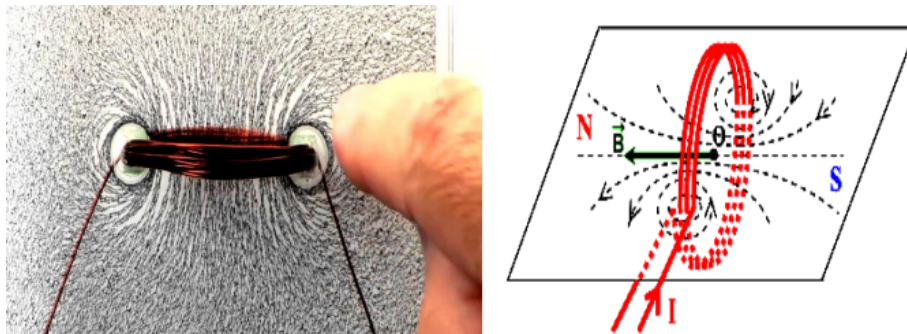


FIGURE 2 – Allure des lignes du champ magnétique créée par la bobine plate @Chtoukaphysique

3.5. Direction du champ \vec{B} (M) créée par la bobine au point M au voisinage de son axe (Oz) :

Le plan $(\Pi)^* \equiv (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, Alors :

$$\vec{B} (M) = B_r (r, \varphi, z) \vec{e}_r + B_z (r, \varphi, z) \vec{e}_z$$

🔗 Invariances :

La distribution de courant est invariante par rotation selon φ , alors le champ B ne dépend pas de φ , d'où :

$$\vec{B} (M) = B_r (r, z) \vec{e}_r + B_z (r, z) \vec{e}_z$$

3.6. L'expression du champ magnétique créée par la bobine au point M :

En appliquant la conservation du flux magnétique (Maxwell-Flux) :

$$\oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Pour un cylindre de rayon r et hauteur dz, on obtient :

$$\pi r^2 (B_z(z + dz) - B_z(z)) + 2\pi r B_r dz = 0 \implies \pi r^2 \frac{\partial B_z}{\partial z} dz + 2\pi r B_r dz = 0$$

d'où :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z}.$$

3.7. L'expression du vecteur position \vec{OM} :

En coordonnées cylindriques (r, φ, z) , on a :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z,$$

☞ L'expression du vecteur vitesse $\vec{v}(M/R)$:

$$\vec{v}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z = v_r\vec{e}_r + v_\varphi\vec{e}_\varphi + v_z\vec{e}_z,$$

☞ L'expression de l'accélération $\vec{a}(M/R)$:

$$\vec{a}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z.$$

3.8 L'expression de la force de LORENTZ \vec{F}_L :

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

3.9 Le champ magnétique seul ne permet pas d'augmenter la vitesse de l'électron car :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_L) = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = 0 \implies E_c = Cte \implies v = Cte$$

3.10 Le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel du laboratoire (R) supposé Galiléen s'écrit :

$$\vec{F}_L = m_e \cdot \vec{a}(M/R)$$

3.11 L'effet de chaque composante du champ \vec{B} :

- La composante radiale B_r agit principalement sur le mouvement axial (Oz), ce qui peut induire un déplacement le long de l'axe du cylindre.

- La composante axiale (tangentielle) B_z influence principalement le mouvement angulaire φ de l'électron et le mouvement radial r , ce qui modifie la trajectoire circulaire autour de l'axe.

➔ Mouvement hélicoïdal autour de l'axe z .

3.12 Équations différentielles du mouvement de l'électron :

En projetant la relation du PFD sur $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ et on obtient :

$$m_e(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -e.r.\dot{\varphi}B_z(z) \quad (1)$$

$$m_e(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = e\dot{r}B_z(z) - e\dot{z}B_r(z) \quad (2)$$

$$m_e\ddot{z} = -er\dot{\varphi}B_r(z) \quad (3).$$

3.13 On a :

$$(2) : m_e(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = e\dot{r}B_z(z) - e\dot{z}B_r(z) \implies m_e(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = e\dot{r}B_z(z) + e\dot{z}\frac{r}{2}\frac{dB_z(z)}{dz}$$

Ce qui donne :

$$m_e(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = e\dot{r}B_z(z) + e\dot{z}\frac{r}{2}\frac{dB_z(z)}{dz} \implies m_e(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = e\dot{r}B_z(z) + e\frac{r}{2}\frac{dB_z(z)}{dt}$$

$$\frac{m_e}{r}\frac{dr^2\dot{\varphi}}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}er^2B_z(z) + C\right) \longrightarrow m_e r^2 \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{er^2}{2}B_z(z) + C$$

Quand $r \rightarrow 0 \implies C = 0$.

3.14 En remplaçant le résultat précédant l'équation (1) et on obtient :

$$m_e\ddot{r} = m_e r \frac{e^2}{4m_e^2} B^2(z) - r \frac{e^2}{2m_e} B^2(z) \implies \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{e^2}{4m_e^2} r B^2(z) = 0$$

D'où :

$$m_e\ddot{r} = m_e r \frac{e^2}{4m_e^2} B^2(z) - r \frac{e^2}{2m_e} B^2(z) \implies \frac{d^2r}{dt^2} + Kr B^2(z) = 0 \quad \text{avec} \quad K = \frac{e^2}{4m_e^2}$$

3.15 En remplaçant $\dot{\varphi}$ et $B_r(z)$ dans l'équation (3) et on obtient :

$$(3) \implies m_e\ddot{z} = -er\frac{e}{2m_e}B_z(z) \times \left(-\frac{r}{2}\frac{dB_z(z)}{dz}\right) = r^2\frac{e^2}{4m_e}B_z(z)\frac{dB_z(z)}{dz}$$

En négligeant les termes en r^2 , ou aura :

$$\frac{dz}{dt} = 0 \implies \dot{z} = Cte = \dot{z}_0 = v_0 \cos \alpha$$

3.16 Par changement de variable, on obtient :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d^2r}{dz^2} \times \frac{dz^2}{dt^2} = v_0^2 \cos^2 \alpha \frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{e^2}{4m_e^2} r B^2(z)$$

D'où :

$$\frac{d^2r}{dz^2} = -\frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2 \cos^2 \alpha} r B^2(z) \implies \frac{d^2r}{dz^2} = -K' r B^2(z) \quad \text{avec} \quad K' = \frac{e^2}{4m_e^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

3.17 L'analogie du rayon lumineux de l'optique géométrique pour le microscope électronique est le faisceau d'électrons

3.18 Approximations des lentilles minces $\implies O_1 \approx O_2 \approx O$, alors :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_1} = \frac{r_0}{AO_1} \approx -\frac{r_0}{OA} \quad \text{et} \quad \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_2} = -\frac{r_0}{O_2A'} \approx -\frac{r_0}{OA'}$$

3.19 D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = -\frac{1}{r_0} \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_2} + \frac{1}{r_0} \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_1}$$

Or, $r = r_0 = cte$ et le champs est nul partout sauf entre z_1 et z_2 (selon l'énoncé), on obtient alors :

$$\int_{z_1}^{z_2} d\left(\frac{dr}{dz}\right) = \int_{z_1}^{z_2} (-K' r_0 B^2(z)) dz = -K' r_0 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_2} - \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_1} = -K' r_0 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz$$

D'où :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = -\frac{1}{r_0} \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_2} + \frac{1}{r_0} \left(\frac{dr}{dz}\right)_{z=z_1} = K' \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz = \frac{1}{f'}$$

Avec :

$$f' = \frac{1}{K' \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz} = \frac{4m_e^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{e^2 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz} \approx \frac{4m_e^2 v_0^2}{e^2 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz} > 0$$

► On remarque que l'expression de f' est indépendante de la direction du champ magnétique, donc f' est indépendante de la polarisation du champ magnétique.

3.20 Comme $f' > 0$, la lentille est convergente. On ne peut pas obtenir une lentille divergente car l'intégrale $\int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz$ est toujours positive.

3.21 La distance focale de la lentille magnétique f' dépend de la vitesse initiale, la masse et de la charge de la particule (ici, l'électron), ainsi que du champ magnétique $B(z)$ créé par les bobines plates (lui-même fonction du rayon a des spires, du courant I et du nombre de spires N).

3.22 Pour une tension U fixée, la vitesse v_0 est également fixée. Ainsi, on peut agir sur le courant I pour modifier le champ magnétique $B(z)$, et donc la valeur de la distance focale f' .

3.23 Les lentilles magnétiques ne sont pas adaptées à la focalisation des ions car :

- Les ions sont bien plus massifs que les électrons \implies la distance focale f' devient très grande;
- Le rayon de courbure devient très grand : selon le principe fondamental de la dynamique (PFD) projeté sur la normale, on a :

$$qvB = \frac{mv^2}{R_c} \implies R_c = \frac{mv}{qB};$$

► Ainsi, les ions sont très peu déviés par les champs magnétiques, rendant les lentilles magnétiques inefficaces.

3.24 L'expression de f' , si $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$:

$$f' = \frac{4m_e^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{e^2 \int_{z_1}^{z_2} B^2(z) dz} \approx \frac{4m_e^2 v_0^2}{e^2 B_0^2 (z_2 - z_1)}$$

3.25 Application numérique : ordre de grandeur de f'

Pour : $z_2 - z_1 = 1$, $\text{mm} = 10^{-3}$ m, $B_0 = 1$ T, $v_0 = 2 \times 10^7$ m.s $^{-1}$, on a :

$$f' = \left(\frac{2 \times 9.11 \times 10^{-31} \times 2 \times 10^8}{1.6 \times 10^{-19} \times 1} \right)^2 \frac{1}{10^{-3}} \approx 5,2 \text{mm} \implies f' \text{ est de l'ordre mm : Résultat acceptable}$$

3.26 La trajectoire d'un électron dans un champ magnétique subit une rotation autour de l'axe (Oz). Le faisceau subit une rotation d'angle ϕ : c'est une trajectoire hélicoïdale autour de l'axe (Oz).

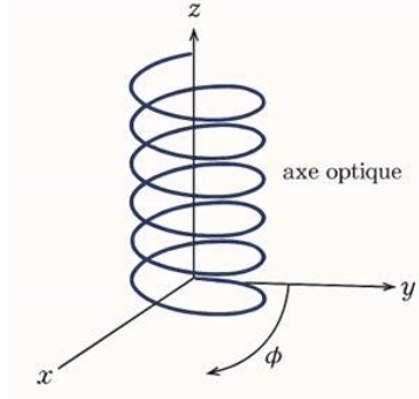


FIGURE 3 – Trajectoire d'un électron dans un champ magnétique @Chtoukaphysique

4. Pouvoir de résolution du microscope électronique

4.1. Le phénomène physique qui limite le pouvoir de résolution d'un microscope est la **diffraction**.

Soit d la distance entre deux points A et B pour être révélé .Il faut donc :

$$d \geq \delta = 0,61 \cdot \frac{\lambda_0}{w_0} \implies \text{AN } d_{\min} \approx 0,61 \cdot \frac{600 \cdot 10^{-9}}{1,5} \approx 244 \text{nm}$$

4.2. **La dualité onde-corpuscule** : La dualité onde-corpuscule est un principe fondamental de la physique quantique selon lequel la lumière ainsi que toute particule matérielle (électron, atome, etc.) présentent à la fois des propriétés ondulatoires et corpusculaires . Ces deux aspects sont complémentaires et inséparables : selon le type d'expérience réalisée, l'un ou l'autre des comportements se manifeste

4.3. **Relation de De Broglie** :

$$\lambda_{\text{LDB}} = \frac{h}{p}$$

4.4. Pour un électron non relativiste de masse m_e , de vitesse v_e et de quantité de mouvement $p = m_e v_e$, la longueur d'onde associée, selon la relation de de Broglie, est donnée par :

$$\lambda_{\text{LDB}}^c = \frac{h}{m_e v_e}$$

Et l'expression de la vitesse v_e d'un électron accéléré par une tension U est donnée :

$$E_c = \frac{1}{2} m_e v_e^2 = eU \implies v_e = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$$

En remplaçant dans la formule de λ_{LDB}^c , et on obtient :

$$\lambda_{\text{LDB}}^c = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}}$$

4.5. En mécanique relativiste, l'énergie cinétique est donnée par la relation :

$$E_c = (\gamma - 1) E_0, \text{ avec } E_0 = m_e c^2 \text{ et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique (T.E.C) à un électron accéléré par une tension U , on a :

$$\Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{initial}) = W(\vec{F}_e) = eU \implies (\gamma - 1) m_e c^2 = eU$$

On en déduit :

$$\gamma = 1 + \frac{eU}{m_e c^2} \implies v_0^r = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{E_0}\right)^2}}$$

Applications numériques :

$$\text{Pour } U = 10 \text{ kV} \implies v_0^r = 5,8 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Pour } U = 100 \text{ kV} \implies v_0^r = 1,6 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{Pour } U = 1000 \text{ kV} \implies v_0^r = 2,8 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Commentaire :

La vitesse de l'électron devient comparable à celle de la lumière sans jamais l'atteindre, ce qui rend nécessaire l'utilisation de la mécanique relativiste pour décrire correctement son mouvement.

4.6. Relation entre λ_{LDB}^r et λ_{LDB}^c :

$$\lambda_{\text{LDB}}^r = \frac{h}{p} = \frac{h}{\gamma m_e v_0^r} \implies \lambda_{\text{LDB}}^r = \frac{h}{\left(1 + \frac{eU}{E_0}\right) \cdot m_e \cdot c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{E_0}\right)^2}}} \quad \text{et } E_0 = m_e c^2$$

D'où :

$$\implies \lambda_{\text{LDB}}^r = \frac{h}{\sqrt{\frac{e^2 U^2}{E_0^2} + \frac{2eU}{E_0}}} = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_e c^2}}} \implies \lambda_{\text{LDB}}^r = \frac{\lambda_{\text{LDB}}^c}{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_e c^2}}}$$

Pour retrouver l'expression de λ_{LDB}^c obtenue dans la question 4.4, il suffit que :

$$\frac{eU}{2m_e c^2} \ll 1 \implies eU \ll 2m_e c^2$$

4.7. Applications numériques :

Les valeurs de λ_{LDB}^c et λ_{LDB}^r pour différentes tensions sont données dans le tableau suivant :

U (kV)	λ_{LDB}^c (m)	λ_{LDB}^r (m)
10	$1,23 \times 10^{-11}$	$1,22 \times 10^{-11}$
100	$3,88 \times 10^{-12}$	$3,70 \times 10^{-12}$
1000	$1,23 \times 10^{-12}$	$8,72 \times 10^{-13}$

TABLE 1 – Longueurs d'onde de De Broglie classique et relativiste pour différentes U accélératrices @Chtoukaphysique

Commentaire :

Les effets relativistes n'imposent pas une limitation à la résolution intrinsèque du microscope électronique; au contraire, ils permettent de l'améliorer.

En effet, pour des tensions faibles ($U = 10 \text{ kV}$), la différence entre les longueurs d'onde classique et relativiste est négligeable. Mais pour des tensions élevées ($U = 100 \text{ kV}$ et surtout 1000 kV), la longueur d'onde relativiste devient significativement plus courte que la longueur d'onde classique.

Or, puisque la résolution intrinsèque du microscope électronique dépend directement de la longueur d'onde de De Broglie des électrons (plus cette longueur d'onde est petite, plus la résolution obtenue est élevée.), on conclut que la prise en compte des effets relativistes permet d'obtenir une résolution supérieure à celle prédite par la mécanique classique.

4.8. Microscope optique :

4.8.1. Les longueurs extrêmes du spectre visible sont : $\lambda_{\text{min}} = 400 \text{ nm}$ at $\lambda_{\text{max}} = 800 \text{ nm}$

4.8.2. $\lambda_0 = 589 \text{ nm}$ correspond à la couleur jaune .

4.8.3. Applications numériques :

$$w_0^0 = n \sin u = \sin 85 = 0,996 \approx 1$$

$$\delta_m^0 = 0,61 \cdot \frac{\lambda_0}{w_0} = \frac{0,61 \cdot 589 \cdot 10^{-9}}{0,996} = 3,6 \cdot 10^{-7} \text{m} (\approx 360 \text{nm})$$

4.9 Microscope électronique :

4.9.1. Applications numériques :

$$w_0^e = n \sin u \approx 10^{-2}$$

$$\delta_m^e = 0,61 \cdot \frac{\lambda_{LDB}}{w_0} = \frac{0,61 \cdot 3,88 \cdot 10^{-12}}{10^{-2}} \approx 2,4 \cdot 10^{-10} \text{m} (\approx 240 \text{pm})$$

➔ Comparaison :

$\delta_m^e \ll \delta_m^0 \implies$ Alors le pouvoir de résolution du microscope électronique est beaucoup plus élevé que celui du microscope optique, ce qui permet d'obtenir une meilleure résolution..

4.9.2. Lorsque l'ouverture numérique w_0^e est constante, pour améliorer la résolution des images obtenues, il faut augmenter la tension accélératrice U .

4.9.3. Calcul de l'énergie cinétique à partir de la résolution spatiale

$$\delta_m^e = 0,61 \cdot \frac{\lambda_{LDB}^r}{w_0^e} = 10^{-12} \text{m} \implies \lambda_{LDB}^r = \frac{10^{-12} \cdot w_0^e}{0,61} = 1,64 \times 10^{-14} \text{m}$$

Or

$$\lambda_{LDB}^r = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_e c^2}}} \implies U^2 + \frac{2m_e c^2}{e} U - \frac{h^2 c^2}{e^2 (\lambda_{LDB}^r)^2} = 0$$

$$\implies aU^2 + bU + c = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{2m_e c^2}{e} \\ c = -\frac{h^2 c^2}{e^2 (\lambda_{LDB}^r)^2} \end{cases}$$

✎ Applications numériques :

La résolution donne $U \approx 7,5 \cdot 10^7 \text{V}$

Finalement

$$E_c = eU \approx 1,2 \times 10^{-11} \text{J} \approx 75 \text{MeV}$$

4.10. En microscopie, la résolution est limitée par la longueur d'onde du rayonnement utilisé. La lumière visible a une longueur d'onde de l'ordre de 400 à 700 nm, ce qui limite la résolution à environ 200 nm. En revanche, les électrons, lorsqu'ils sont accélérés à haute tension, possèdent une longueur d'onde de Broglie beaucoup plus courte (souvent inférieure à 1 nm, voire à quelques picomètres), ce qui permet d'observer des détails bien plus fins, jusqu'à l'échelle atomique.

***** **Fin** *****