L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Le sujet est constitué de quatre parties et aborde quelques thématiques en lien avec la mécanique terrestre. Les parties 1 et 4 sont totalement indépendantes des autres parties de l'épreuve. Cependant, certaines questions de la partie 3 utilisent des réponses de la partie 2.

Il est **fortement recommandé de commencer par la première partie**. Cette partie est notée sur **4 points** et le reste de l'épreuve sur **16 points**.

Données numériques :
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$
- Rayon moyen de la Terre : $R = 6,4 \times 10^3 km$
- Masse de la Terre : $M_T = 6 \times 10^{24} kg$
- Vitesse de rotation de la Terre autour de son axe : $\omega_T = 7,3 \times 10^{-5} rad.s^{-1}$

On rappelle la formule du double produit vectoriel suivante :

$$\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}\right) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\,\overrightarrow{b} - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)\overrightarrow{c}$$

Partie 1
Etude d'un pendule simple
(Barème : 4/20)

Un objet ponctuel M de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur $L = OM$. Le fil est attaché au point O fixe dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen (figure 1).

L'objet est astreint à se déplacer dans le plan vertical Oyz et soumis au champ de pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{u}_z$. Sa position est repérée par l'angle θ que fait le fil avec l'axe vertical Oz. Les frottements seront négligés dans toutes les questions de cette partie.

1.1. Quelles sont les forces appliquées au point M ? Donner les projections de ces forces dans la base locale $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$.

1.2. Exprimer la vitesse et l'accélération du point M dans la base $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_\theta)$.

1.3. Déterminer l'équation différentielle en θ régissant le mouvement du point M dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.

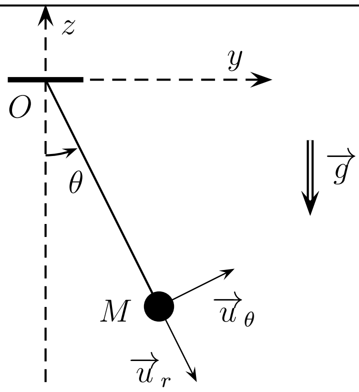

FIGURE 1 – Pendule simple.

1.4. On se place dans l'hypothèse des petits mouvements où l'angle θ reste petit. Déterminer $\theta(t)$ sachant que l'objet est abandonné sans vitesse initiale à la position $\theta(0) = \theta_0$.

En déduire que le mouvement est périodique de période : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

Partie 2
Gravitation et pesanteur de la Terre sphérique

Dans cette partie, on étudie les actions subies par un objet ponctuel matériel M de masse m dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$. Le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ est supposé galiléen et on le munit du repère $(OXYZ)$ (voir figure 2). Ce référentiel est appelé par la suite "*référentiel absolu*". Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est en rotation uniforme autour de l'axe OZ qui relie les les pôles sud et nord de la Terre, avec une vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega}_T = \omega_T \overrightarrow{u}_Z$ supposée constante. $\mathcal{R}_T$ est dit "*référentiel relatif*".

Le point M reste suffisamment proche de la surface terrestre de tel sorte qu'on puisse écrire en première approximation $OM \simeq R$. On note H la projection orthogonale de M sur l'axe de rotation OZ.

Dans cette partie, on considère la Terre comme parfaitement sphérique et homogène, de rayon moyen R et de masse M_T.

On rappelle la formule liant les dérivées par rapport au temps d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ dans les deux référentiels :

$$\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_G} = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_T} + \overrightarrow{\omega}_T \wedge \overrightarrow{A}$$

2.1. Champ gravitationnel de la Terre

2.1.1. Ecrire l'expression de la force de gravitation $\overrightarrow{F}_g$ exercée par la Terre sur l'objet M.

2.1.2. Le champ gravitationnel de la Terre au point M est défini par $\overrightarrow{g_0} = \dfrac{\overrightarrow{F}_g}{m}$. Exprimer $\overrightarrow{g_0}$ en fonction de G, M_T, R et $\overrightarrow{OM}$.

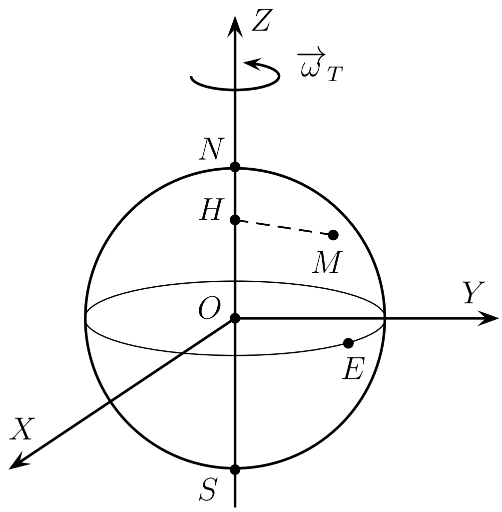

FIGURE 2 – Terre sphérique en rotation autour de l'axe des pôles.

2.2. Lois de composition des vitesses et des accélérations

2.2.1. Le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est-il galiléen ? Justifier.

On associe au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ un repère d'origine un point O' situé la surface de la Terre.

2.2.2. Exprimer la vitesse du point M dans le référentiel absolu en mettant en évidence une vitesse relative et une vitesse d'entrainement. Donner les expressions de ces deux vitesses.

2.2.3. Exprimer l'accélération du point M dans le référentiel absolu en mettant en évidence une accélération relative, une accélération d'entrainement et une accélération complémentaire dite de Coriolis. Donner les expressions de ces trois accélérations.

2.2.4. Montrer que lorsque le point M est soumis uniquement à la force de gravitation dans le référentiel $\mathcal{R}_G$, l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel relatif $\mathcal{R}_T$ fait apparaître deux autres forces dont on donnera les noms et les expressions.

2.3. Définition du poids d'un corps

On considère un pendule simple constitué du point M, objet d'étude de cette partie, suspendu par un fil. Ce pendule est supposé en équilibre dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$.

2.3.1. Ecrire la condition d'équilibre du pendule en faisant intervenir la force gravitationnelle, les forces évoquées dans la question précédente et la tension $\overrightarrow{F}$ du fil.

2.3.2. Le poids $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ du corps est défini tel qu'à l'équilibre du pendule, on a la relation : $\overrightarrow{\mathcal{P}} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. Le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$ au point M est défini par $\overrightarrow{\mathcal{P}} = m\,\overrightarrow{g}(M)$.

Montrer que le champ de pesanteur terrestre au point M est donné par

$$\overrightarrow{g}(M) = -\frac{G.M_T}{OM^3}\,\overrightarrow{OM} + \omega_T^2\,\overrightarrow{HM} \tag{1}$$

O étant le centre de la Terre et H la projection orthogonale de M sur l'axe des pôles (voir figure 2).

2.3.3. Calculer la valeur numérique de $\Delta g = ||\overrightarrow{g}(N)|| - ||\overrightarrow{g}(E)||$, la différence des intensités du champ de pesanteur terrestre au pôle nord N et en un point E de l'équateur.

En réalité, on mesure $\Delta g = 52 \times 10^{-3} m.s^{-2}$; proposer une raison pour expliquer l'écart trouvé.

Partie 3
Etude de la chute d'un corps : Déviation vers l'Est

Dans cette partie, on va voir comment une expérience de chute libre dans le référentiel terrestre permet de mettre en évidence la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique.

On travaille dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, dans lequel on étudie la chute d'une bille (mobile ponctuel M) lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur h au dessus du sol. On suppose que l'expérience est réalisée à l'équateur. On prend comme repère $(O'xyz)$, O' étant un point de la surface terrestre, à la verticale du point L du lâcher, $(O'x)$ est dirigé suivant la verticale ascendante, $(O'y)$ est dirigé vers l'Est et $(O'z)$ vers le nord (voir figure 3). On note ω_T le vecteur rotation de la Terre par rapport au référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$, g l'intensité du champ de pesanteur supposé uniforme et m la masse de la bille. On néglige tout frottement.

La bille, assimilé à un point matériel, est repéré par ses trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) relativement au repère $(O'xyz)$.

3.1. Equations du mouvement

3.1.1. En utilisant les résultats de la section 2.2., montrer que le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille s'écrit dans R_T :

$$m\overrightarrow{a}(M/R_T) = m\overrightarrow{g} - 2m\overrightarrow{\omega}_T \wedge \overrightarrow{v}(M/R_T)$$

où $\overrightarrow{g}$ est le champ de pesanteur terrestre donné par la relation (1).

La bille M reste suffisamment proche de la surface terrestre ($OM \approx R$). Compte tenu de la valeur numérique calculée dans la question 2.3.3., on admettra par la suite que les composantes de l'accélération de pesanteur $\overrightarrow{g}$ dans la base $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z)$ sont $(-g, 0, 0)$ avec $g = 9,8\,m.s^{-2}$.

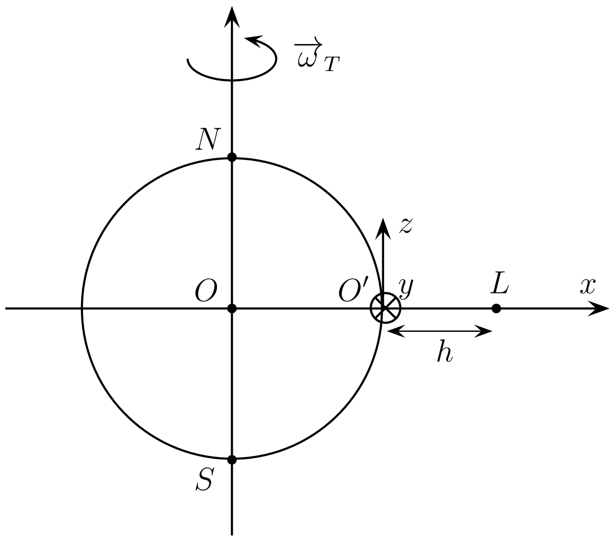

FIGURE 3 – Expérience de chute dans le référentiel terrestre.

3.1.2. Déterminer les trois équations différentielles auxquelles obéissent les trois coordonnées cartésiennes (x, y, z) de M dans le référentiel terrestre.

3.2. Déviation vers l'Est

La chute de la bille est sans vitesse initiale, à partir du point $L(h, 0, 0)$. Comme ω_T est petite, il est possible d'étudier le phénomène " à l'ordre 1 en ω_T ", c'est à dire en négligeant dans les équations tous les termes proportionnels à ω_T^2 ou à des puissances supérieures à 2.

3.2.1. Résoudre dans cette approximation les équations différentielles obtenues à la question précédente en montrant que :

$$x(t) = a\,t^2 + h \;; \quad y(t) = b\,t^3 \;; \quad z(t) = 0$$

où a et b sont deux constantes à expliciter en fonction de g et ω_T.

3.2.2. En déduire que la bille tombe sur le sol en étant déviée d'une quantité y_1 vers l'Est. Calculer la valeur numérique de y_1 lorsque $h = 200\,m$.

Partie 4
Gravimètre optique à chute libre

Dans cette partie, on s'intéresse à la mesure de l'accélértion de pesanteur en utilisant une méthode interférométrique. Pour cela on mesure la variation de la position d'une masse en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre, en fonction du temps.

La figure 4 décrit le schéma de principe du dispositif expérimental de mesure de l'accélération de pesanteur terrestre. Le cœur du dispositif est un interféromètre optique abrité dans une chambre à vide. Un faisceau laser est divisé en deux faisceaux à l'aide d'une lame semi-réfléchissante (S_p). L'un des deux faisceaux est réfléchi par un miroir immobile (M_1), le second faisceau est réfléchi par un miroir mobile (M_2) en chute libre verticale. Les deux faisceaux sont mélangés au niveau d'une photodiode (détecteur de lumière). Le signal lumineux détecté par la photodiode est enregistré par un dispositif (Enregistreur). Le signal enregistré est donné par la figure 5.

On néglige les frottements et on pose $\ell_1 = OO_1$ et $\ell_2 = OO_2$. Le miroir mobile (M_2) est lâché à l'instant $t = 0$, sans vitesse initiale, à partir de la position correspondante à $\ell_2(t = 0) = \ell_1$.

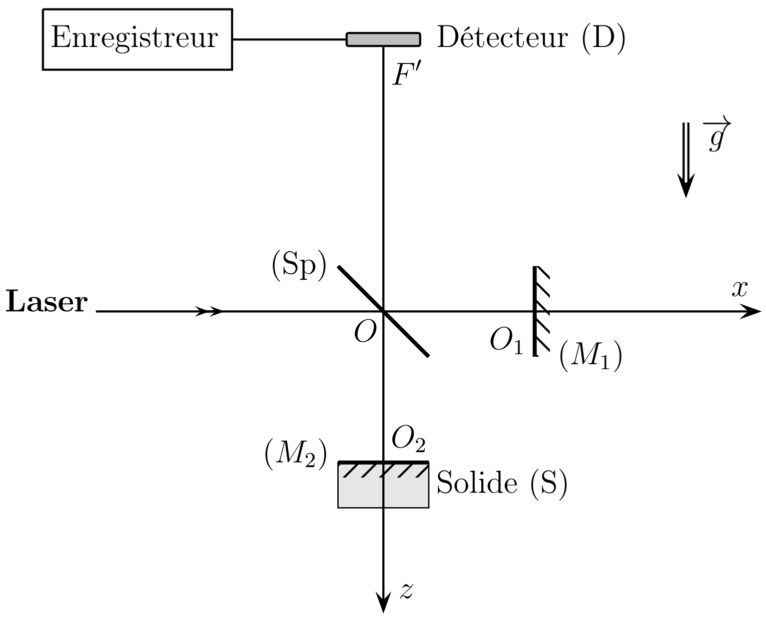

FIGURE 4 – Interféromètre de Michelson.

4.1. Equation horaire du mouvement

4.1.1. Expliquer l'intérêt de placer l'interféromètre sous vide.

4.1.2. On considère l'accélération de la pesanteur uniforme et constante, de valeur g. Montrer que la position z du mobil est donnée par la relation

$$z(t) = \ell_1 + \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

4.2. Mesure de la gravité par interférométrie optique

4.2.1. Rappeler les conditions pour observer le phénomène d'interférence entre deux ondes lumineuses.

On admet que ces conditions sont satisfaites. Le faisceau laser incident supposé à rayons parallèles est divisé en deux faisceaux de même amplitude par la lame séparatrice (S_p).

4.2.2. Déterminer la différence de marche δ des deux faisceaux au point F' en fonction de e ($e = OO_2 - OO_1$).

4.2.3. Donner l'expression de l'intensité lumineuse E reçue au point F' où le faisceau arrive sur le détecteur en fonction de e. On note $2E_0$ l'intensité maximale.

4.2.4. En utilisant la relation (2), écrire l'expression de l'intensité lumineuse en fonction du temps $E(t)$.

Les variations de l'intensité lumineuse $E(t)$ enregistrées en F' au cours du temps sont données par la figure 5. La longueur d'onde du laser utilisé est $\lambda = 633\,nm$.

4.2.5. En utilisant la figure 5 et en remarquant qu'un minimum d'intensité est enregistré en $t = 0,40\,ms$, déterminer la valeur numérique de g. Justifier.

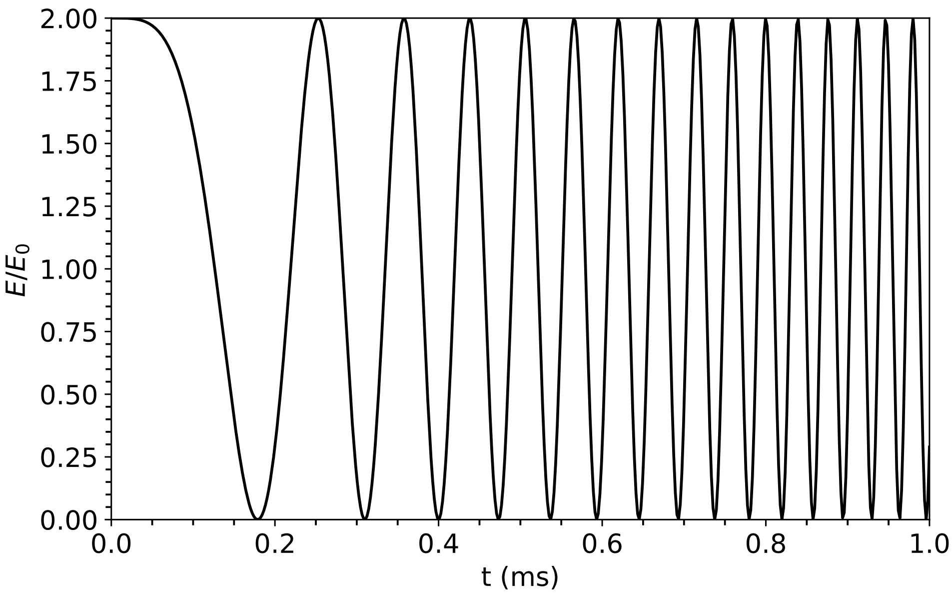

FIGURE 5 – Interférogramme $E(t)$.

Fin de l'épreuve