المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المدرسة الوطنية العليا للمعادن بالرباط

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE RABAT

CNC 2022

Concours National Commun

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et Établissements Assimilés

https://www.ensmr-cnc2022.ma/

Correction

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 1

Concours **PSI**

Pour toute réclamation, correction ou remarque, veuillez envoyer un message par l'émail
adoch.hasaan@gmail.com

Partie 1 : Turbine à gaz

1) Dans le cas d'un écoulement adiabatique, le premier principe industriel devient :

$$D_m\left(h_s - h_e + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) + g(z_s - z_e)\right) = \mathcal{P}_u$$

Or la turbine est horizontale $z_s \simeq z_e$ et la variation de la vitesse du fluide est négligeable donc l'expression se simplifie pour donner :

$$\mathcal{P}_u = D_m(h_s - h_e)$$

La vapeur d'eau est assimilée à un gaz parfait alors :

$$h_s - h_e = c_p\,(T_s - T_e) = c_p\,(T_2 - T_1)$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{P}_u = D_m c_p\,(T_2 - T_1)}$$

2) D'après l'expression donnée pour l'entropie **molaire**, on peut déduire l'entropie massique par l'expression :

$$\boxed{\Delta s = M\Delta s_m = M\left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1}Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - RLn\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\right)}$$

L'application numérique donne :

$$\boxed{\Delta s = -114,59\ J.K^{-1}.kg^{-1}}$$

Or la transformation est adiabatique donc $Q = 0$ alors l'entropie échangée est nulle donc :

$$\Delta s = s_c = -114,59\ J.K^{-1}.kg^{-1}$$

s_c est l'entropie crée durant la transformation. Selon le deuxième principe s_c doit être toujours positive pour un système fermé. Ceci montre qu'on a une contradiction.

3) L'évolution est réversible donc l'entropie crée est nulle alors :

$$D_m(s_s - s_e) = \frac{\mathcal{P}_{th}}{T_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_{th} = D_m T_0(s_s - s_e) = D_m T_0 M\left(\frac{\gamma R}{\gamma - 1}Ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - Ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right)\right)}$$

A.N la puissance thermique perdue par le système dans ce cas est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th} = -35\,293,72W}$$

4) En utilisant le premier principe industriel, on écrit que pour la turbine :

$$D_m(h_s - h_e) = D_m c_p\,(T_2 - T_1) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

Alors :

$$\boxed{\mathcal{P}_u = D_m c_p\,(T_2 - T_1) - P_{th}}$$

A.N :

$$\boxed{\mathcal{P}_u = 24\,485,52\ W}$$

 adoch.hasaan@gmail.com

Partie 2 : Mesure de la vitesse d'un écoulement

1. Profil de vitesse dans une conduite cylindrique

1.1) L'écoulement incompressible signifie que la dérivée particulaire de la masse volumique est nulle :

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad}\right)\rho = 0}$$

1.2) Pour un écoulement incompressible, l'équation locale de conservation de la masse devient :

$$\boxed{div(\overrightarrow{v}) = 0}$$

Donc la divergence du champ de vitesse est nulle. Le débit volumique est alors conservé car :

$$\iint div(\overrightarrow{v})d\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\oiint \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS} = 0}$$

Le débit volumique à l'entrée de la conduite est alors égale au débit volumique à sa sortie.

1.3) Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension. Alors :

$$[\eta] = [\rho][v_m][a] = M.L^{-3}.L.T^{-1}.L = M.L^{-1}.T^{-1}$$

Donc le coefficient η s'exprime alors en $kg.m^{-1}.s^{-1}$.

1.4) Un régime d'écoulement est :

• **Laminaire :** est un écoulement dont le transfert du quantité de mouvement par viscosité est dominant devant le transfert de quantité de mouvement par convection. Dans ce cas, les lignes de champ sont parallèles entre eux.

• **Turbulent :** est un écoulement dont le transfert du quantité de mouvement par viscosité est négligeable devant le transfert de quantité de mouvement par convection. Dans ce cas, l'écoulement est chaotique.

1.5) L'écoulement est incompressible alors :

$$div(\overrightarrow{v}) = 0 = \frac{dv}{dz}$$

Donc $v(r,z)$ ne dépend pas de z alors :

$$\boxed{v(r,z) = v(r)}$$

1.6) Le champ de vitesse est porté par $\overrightarrow{e}_z$ donc le mouvement des particules fluides est rectiligne. L'écoulement est permanent alors le champ de vitesse ne dépend pas du temps donc le mouvement est uniforme.

1.7) Dans tout système de coordonnées :

$$d\overrightarrow{F}_p = -\overrightarrow{grad}(P)\, d\tau$$

La pression dans ce problème dépend de r et z et le particule étudiée possède une forme cylindrique de rayon r et de longueur/ hauteur dz alors :

$$\boxed{d\overrightarrow{F}_p = -\left(\frac{\partial P}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e}_z\right)\pi r^2 dz}$$

1.8) Pour la force de viscosité sur une particule fluide est donnée par :

$$\boxed{d\overrightarrow{F}_\eta = \eta dS\frac{dv(r)}{dr}\overrightarrow{e}_z = 2\pi r dz \eta\frac{dv}{dr}\overrightarrow{e}_z}$$

N.B : une petite faute dans l'énoncé, l'expression est en fonction de $\frac{dv}{dr}$ et non pas $\frac{dv}{dz}$ car v ne dépend pas de z.

1.9) En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur une particule fluide de volume $d\tau = rdrd\varphi dz$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la conduite dans $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$\rho d\tau \left(\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad} \right) \overrightarrow{v} \right) = d\overrightarrow{F}_p + d\overrightarrow{F}_\eta + d\overrightarrow{F}_{poids}$$

Or le poids est négligeable ($d\overrightarrow{F}_{poids} \mapsto \overrightarrow{0}$), l'écoulement est permanent ($\frac{\partial \overrightarrow{v}}{\partial t} = \overrightarrow{0}$) et laminaire $\left(||d\overrightarrow{F}_\eta|| >> || \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad} \right) \overrightarrow{v}|| \right)$ donc l'équation devient :

$$-\left(\frac{\partial P}{\partial r}\overrightarrow{e}_r + \frac{\partial P}{\partial z}\overrightarrow{e}_z \right) \pi r^2 dz + 2\pi r dz \eta \frac{dv}{dr}\overrightarrow{e}_z = \overrightarrow{0}$$

La projection sur $\overrightarrow{e}_z$ donne :

$$\pi r^2 dz \frac{\partial P}{\partial z} = 2\pi r dz \eta \frac{dv}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv}{dr}}$$

1.10) La projection sur le vecteur $\overrightarrow{e}_r$ donne :

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial r} = 0}$$

Donc la pression $P(r,z)$ ne dépend de r, elle dépend seulement de z. L'équation précédente devient une égalité entre deux fonctions l'une dépend de z et l'autre dépend de r. Or r et z sont indépendants alors les deux termes égales à une constante K :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv}{dr} = K$$

Donc l'intégration de l'équation différentielle de la pression donne :

$$P(z) = Kz + K'$$

En effet, la vitesse est une fonction décroissante en fonction de r (maximale au centre et nulle sur les parois) la constante K est donc négative alors la pression est une fonction affine donc la pente est négative.

D'autre part, on a :

$$\Delta P = P(z=0) - P(z=L) = K' - (KL + K') = -KL \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{\Delta P}{L} \quad et \quad K' = P(z=0)$$

Alors :

$$\boxed{P(z) = -\frac{\Delta P}{L}z + P(z=0)}$$

1.11) Au contact de la conduite, le fluide a nécessairement la même vitesse que la paroi. S'il n'en était pas ainsi, la paroi exercerait une force infiniment grande sur la couche de fluide en contact. Dit autrement, du fait de sa viscosité, le fluide ne peut pas glisser sur la paroi. La conduite possède une vitesse nulle donc le champ de vitesse vérifie :

$$\boxed{v(r=a) = 0}$$

1.12) D'après la question 1.10 :

$$\frac{2\eta}{r}\frac{dv}{dr} = K \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = \frac{K}{2\eta}r \quad \Rightarrow \quad v(r) = \frac{K}{4\eta}r^2 + cte$$

D'après la question précédente, la condition d'adhérence s'écrit :

$$v(r=a) = 0 = \frac{K}{4\eta}a^2 + cte \quad \Rightarrow \quad cte = -\frac{K}{4\eta}a^2$$

Or $K = -\dfrac{\Delta P}{L}$ Donc :

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta}\left(r^2 - a^2\right)$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{v}(r) = \frac{a^2\Delta P}{4L\eta}\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\overrightarrow{e}_z = v_0\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\overrightarrow{e}_z}$$

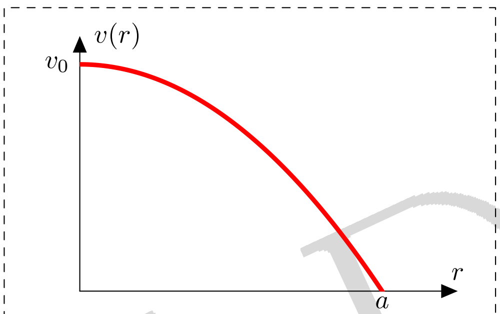
Alors :

$$\boxed{v_0 = \frac{a^2\Delta P}{4L\eta}}$$

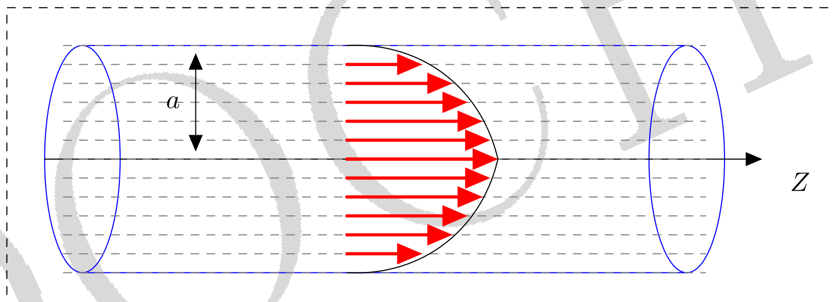
1.13) La norme de la vitesse est donnée par :

$$v(r) = v_0\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)$$

v_0 est le vitesse à l'origine qui est la valeur maximale alors que $v(r)$ diminue avec r jusqu'à s'annuler en $r = a$ donc l'allure de cette fonction est :



L'allure de la vitesse en fonction de r



Représentation du champ vitesse à l'interieur de la conduite

L'écoulement trouvée est similaire à l'écoulement de Poiseuille d'un fluide visqueuse dans une conduite cylindrique.

1.14) Le débit volumique de ce fluide à travers une section du cylindre est donnée par :

$$D_v = \iint \overrightarrow{v}.\overrightarrow{dS} = \iint v(r)\overrightarrow{e}_z.dS\overrightarrow{e}_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} v(r).dr.rd\varphi = \int_0^a rv_0\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)dr\int_0^{2\pi} d\varphi$$

L'intégration donne :

$$D_v = 2\pi v_0\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4a^2}\right]_0^a = 2\pi v_0\frac{a^2}{4} = \frac{v_0 a^2\pi}{2}$$

En remplaçant v_0 par son expression, on trouve :

$$\boxed{D_v = \frac{a^4\pi}{8L\eta}\Delta P = \varepsilon\frac{a^4\Delta P}{\eta L}} \quad \textit{avec :} \quad \boxed{\varepsilon = \frac{\pi}{8}}$$

1.15) La vitesse moyenne est reliée au débit par la relation :

$$D_v = v_m S = v_m\pi a^2$$

Donc :

$$\boxed{v_m = \frac{a^2}{8L\eta}\Delta P = \frac{v_0}{2}}$$

1.16) On a :

$$v_m = \frac{a^2}{8L\eta}\Delta P \quad et \quad \mathcal{R}e = \frac{2\rho v_m a}{\eta}$$

Application numérique :

$$\boxed{v_m = 0,042\ m/s = 150\ m/h} \quad et \quad \boxed{\mathcal{R}e = 116,8}$$

Le nombre de Reynolds de cet écoulement est très faible devant la valeur critique donnée (1000) donc l'écoulement est laminaire car l'effet de la viscosité est dominant comparant à l'effet de la convection.

2. Vélocimétrie laser

2.1) La couleur correspondante à $\lambda_0 = 514,5\ nm$ est la couleur verte.

2.2) D'après le schéma :

$$\boxed{\overrightarrow{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(cos(\alpha)\overrightarrow{e}_x - sin(\alpha)\overrightarrow{e}_z\right)} \quad et \quad \boxed{\overrightarrow{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(cos(\alpha)\overrightarrow{e}_x + sin(\alpha)\overrightarrow{e}_z\right)}$$

2.3) L'amplitude résultante est la somme des amplitudes :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t) = S_0\left(cos(\varphi_1) + cos(\varphi_2)\right) = 2S_0 cos\left(\frac{\varphi_1(M)+\varphi_2(M)}{2}\right) cos\left(\frac{\varphi_1(M)-\varphi_2(M)}{2}\right)$$

Or :

$$\overrightarrow{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(cos(\alpha)\overrightarrow{e}_x - sin(\alpha)\overrightarrow{e}_z\right) \quad ; \quad \overrightarrow{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(cos(\alpha)\overrightarrow{e}_x + sin(\alpha)\overrightarrow{e}_z\right) \quad et \quad \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e}_x + z\overrightarrow{e}_z$$

donc :

$$\varphi_1(M) + \varphi_2(M) = 2\omega t - \left(\overrightarrow{k}_1 + \overrightarrow{k}_2\right).\overrightarrow{OM} + 2\varphi_0 = 2\omega t + 2\varphi_0 - \frac{4\pi}{\lambda_0}cos(\alpha)x$$

$$\varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \left(\overrightarrow{k}_2 - \overrightarrow{k}_1\right).\overrightarrow{OM} = \frac{4\pi}{\lambda_0}sin(\alpha)z$$

En remplaçant dans l'expression de l'amplitude résultante, on obtient :

$$\boxed{s(M,t) = 2S_0\ cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0}cos(\alpha)x\right) cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}sin(\alpha)z\right)}$$

2.4) On remarque que :

• L'onde dépend de deux coordonnées cartésiennes (x,z) donc ce n'est pas une onde plane.

• La fonction $s(M,t)$ ne s'écrit pas comme produit de deux fonctions une spatiale et l'autre temporelle donc elle ne correspond pas à une onde stationnaire.

• L'onde est monochromatique car de point de vue temporel $s(M,t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation ω.

• L'onde est progressive dans la direction de x croissants car on peut écrire cette fonction comme étant une onde sinusoidale progressive dont l'amplitude dépend de z

$$s(M,t) = 2S_0\ cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}sin(\alpha)z\right) cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0}cos(\alpha)x\right) = S(z)cos(\omega t' - kx)$$

2.5) Les deux ondes interférent vérifient les conditions d'interférence dans le cadre de l'approximation scalaire à savoir elles sont synchrones, mutuellement cohérentes. Alors l'intensité résultante dans la zone d'interférence est différente de la somme des intensités des deux ondes interférent alors on a des interférences.

2.6) Le déphasage φ en M est donné par :

$$\boxed{\varphi = \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = \left(\overrightarrow{k}_2 - \overrightarrow{k}_1\right).\overrightarrow{OM} = \frac{4\pi}{\lambda_0} sin(\alpha) z}$$

L'intensité dans la zone de croisement est donnée par :

$$I(M) =< s^2(M,t) >= \left\langle 2S_0 \, cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} sin(\alpha) z\right) cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} cos(\alpha) x\right)\right\rangle$$

La moyenne temporelle d'une constante c'est elle-même donc :

$$I(M) = 4S_0^2 \, cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} sin(\alpha) z\right) \left\langle cos^2\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} cos(\alpha) x\right)\right\rangle$$

Or :

$$\left\langle cos^2\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0}\right)\right\rangle = \left\langle \frac{1 + cos\left(2\omega t + 2\varphi_0 - 2\frac{2\pi}{\lambda_0} cos(\alpha) x\right)}{2}\right\rangle = \frac{1 + \left\langle cos\left(2\omega t + 2\varphi_0 - 2\frac{2\pi}{\lambda_0} cos(\alpha) x\right)\right\rangle}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\boxed{I(M) = 2S_0^2 \, cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} sin(\alpha) z\right) = I_{max} \, cos^2\left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0}\right)} \quad Avec : \quad \boxed{\Lambda_0 = \frac{\lambda_0}{sin(\alpha)}}$$

2.7) Les zones d'égale intensité c'est-à-dire l'ensemble de point M dont $I(M) = cte$ correspond à $z = cte'$ donc les franges sont rectilignes. L'inter-frange i_0 est la distance entre deux franges brillantes successives. Une frange brillante correspond à :

$$I(M) = I_{max} \quad \Rightarrow \quad cos^2\left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad 2\pi \frac{z}{\Lambda_0} = \pi p \quad Avec : \quad p \in \mathcal{Z}$$

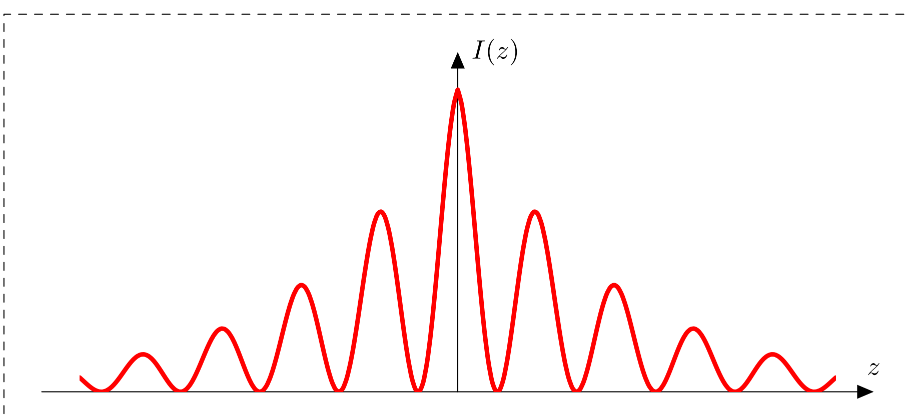
Alors la position de la frange brillante d'ordre p est :

$$z_p = \frac{\Lambda_0}{2} p$$

L'inter-frange est donc :

$$i_0 = z_{p+1} - z_p = \frac{\Lambda_0}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_0 = \frac{\lambda_0}{2 sin(\alpha)}}$$

2.8) La largeur des faisceaux incidents donne une visibilité plus faible donc l'allure de $I(z)$ est :



2.9) D'après le schéma, on peut mesurer une seule période entre deux pics :

$$T = 0,6 \times 1\mu s = 0,6\ \mu s$$

ou mesurer la durée de cinq périodes puis diviser sur 5 (ce qui est plus précis) :

$$\boxed{T = 0,65\ \mu s}$$

2.10) Les particules de traçant possèdent une vitesse V uniforme dans une trajectoire rectiligne donc pendant une période T elle passe d'une frange brillante à la frange brillante suivante la distance parcourue est donc égale à l'inter-frange. Donc :

$$V.T = i_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{i_0}{T} = \frac{\lambda_0}{2T sin(\alpha)}}$$

A.N :

$$\boxed{V = 2,28\ m/s}$$

2.11) D'après la loi de Descartes :

$$\boxed{n_0 sin(\alpha) = n_f sin(\alpha')}$$

2.12) Par définition, l'indice optique d'un milieu est donné par :

$$n_f = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 f}{\lambda f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n_f}}$$

2.13) pour l'inter-frange, il suffit de remplacer λ_0 par λ et α par α' ce qui donne :

$$\boxed{i = \frac{\lambda}{2sin(\alpha')}}$$

En utilisant les relations des deux questions précédentes, on montre que $i = i_0$ donc l'inter-frange ne change pas. L'indice du fluide n'a pas donc d'influence.

2.14) Le déphasage est par définition :

$$\varphi'(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta$$

δ est la différence de marche entre les deux rayons. Elle est donnée par :

$$\delta = sin(\alpha)z - n_l e = sin(\alpha)z - e\left(1 + a.u(t)\right)$$

Alors :

$$\boxed{\varphi'(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(sin(\alpha)z - e\left(1 + a.u(t)\right)\right)}$$

2.15) Les franges brillantes correspond à une intensité maximale. Or :

$$I(M) = I_{max}\, cos^2\left(\varphi'\right) \quad \Rightarrow \quad cos^2\left(\varphi'\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi' = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(sin(\alpha)z - e\left(1 + a.u(t)\right)\right) = p\pi \quad Avec: \quad p \in \mathcal{Z}$$

Donc la position des franges brillantes est donnée par :

$$\boxed{z(t) = \frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)}p + \frac{e}{sin(\alpha)}\left(1 + a.u(t)\right)}$$

2.16) La vitesse de déplacement des franges peut être définie par :

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{ea}{sin(\alpha)}\frac{du}{dt}$$

On veut une vitesse constante donc :

$$V_0 = \frac{ea}{sin(\alpha)}\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dt} = \frac{V_0}{ea}sin(\alpha) = cte$$

Alors la tension doit être une fonction affine du temps :

$$\boxed{u(t) = \frac{V_0}{ea}sin(\alpha)t + u(t=0)}$$

Lorsqu'on applique cette tension les franges brillantes se déplacent dans un sens alors les particules du traceur clignotent avec une période variable selon le sens de l'écoulement.

2.17) La particule du traceur se déplace avec une vitesse V constante. D'autre part pour une lame soumise à une tension :

$$u(t) = \frac{V_0}{ea}sin(\alpha)t + u(t=0)$$

Les franges brillantes se déplacement avec une vitesse V_0 (**qu'on suppose inférieur à la vitesse V de l'écoulement**) dans le même sens de l'écoulement. Une frange d'ordre p est repérée par :

$$z_p(t) = \frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)}p + \frac{e}{sin(\alpha)}\left(1 + a.u(t)\right)$$

Si on note t_1 l'instant de rencontre d'une particule de traceur une frange brillante d'ordre p et t_2 l'instant ou elle rencontre la frange $p+1$, alors la période du clignotement est :

$$T' = t_2 - t_1$$

Donc :

$$T'V = z_{p+1}(t_1 + T') - z_p(t_1) = \frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)}(p+1) + \frac{e}{sin(\alpha)}\left(1 + a.u(t_1 + T')\right) - \left(\frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)}p + \frac{e}{sin(\alpha)}\left(1 + a.u(t_1)\right)\right)$$

$$T'V = \frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)} + \frac{ea}{sin(\alpha)}\left(u(t_1 + T') - u(t_1)\right) = \frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)} + \frac{ea}{sin(\alpha)}\frac{V_0}{ea}sin(\alpha)T' = \frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)} + V_0T'$$

Alors la période de clignotement du photodétecteur est :

$$\boxed{T' = \frac{\lambda_0}{2sin(\alpha)\left(V - V_0\right)}}$$

On retrouve l'expression de la période T de la question (2.10) lorsqu'on considère que les franges sont fixes $V_0 = 0$.