

CONCOURS NATIONAL COMMUN CNC

Correction proposée par : **DRISS LAHBOUB**

lahboub.driss.agr@gmail.com

ÉPREUVE DE PHYSIQUE 1 - PSI

Partie I - Turbine à gaz

□—1. Le but d'une turbine est de récupérer une puissance mécanique, les pertes thermiques sont donc a priori faibles ($P_{th} = 0$). La turbine est horizontale, il n'y a donc pas de variation d'énergie potentielle $e_{p,s} - e_{p,e} = 0$. En négligeant de plus les variations d'énergie cinétique (d'après l'énoncé $e_{c,s} - e_{c,e} = 0$), le premier principe appliqué à la turbine donne : $P_u = D_m[h_s - h_e]$ soit d'après la deuxième loi de Joule (gaz parfait) : $h_s - h_e = c_p(T_2 - T_1)$ ce qui donne :

$$P_u = D_m c_p (T_2 - T_1) \quad (1)$$

□—2. L'énoncé demande de calculer la variation d'entropie !. En fait, il s'agit de calculer soit la variation d'entropie massique ou (molaire), car on ne dispose pas de la masse du fluide (ou sa quantité de matière). On calcule ici la variation d'entropie massique entre l'entrée et la sortie de la turbine, on a :

$$\Delta s = \frac{R}{M_e} \left[\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right] \quad (2)$$

Application numérique : $\Delta s = -3,5 \times 10^2 \text{ J.K}^{-1}\text{kg}^{-1}$

Remarque : Pour la variation d'entropie molaire entre l'entrée et la sortie de la turbine :

$$\Delta s_m = M_e \Delta s = R \left[\frac{\gamma}{(\gamma - 1)} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right]$$

D'après le deuxième principe de la thermodynamique (avec $P_{th} = 0$) : $s_{crée} = D_m \Delta s = -3,5 \times 10^2 \text{ J.K}^{-1}.\text{s}^{-1} < 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse d'un écoulement adiabatique (car l'entropie créée est toujours supérieure ou égale à 0).

□—3. La transformation, dans la turbine, est supposée réversible. Alors, d'après le second principe de la thermodynamique : $P_{th} = T_0 D_m M_e (s_s - s_e)$, soit donc :

$$P_{th} = \frac{D_m T_0 R}{M_e} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right] \quad (3)$$

Application numérique : $P_{th} = -107 \text{ kW}$

□—4. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, on trouve :

$$P_u = \frac{\gamma R D_m}{(\gamma - 1) M_e} (T_2 - T_1) - P_{th} \quad (4)$$

Application numérique : $P_u = -493 \text{ kW}$

Partie II - Mesure de la vitesse d'un écoulement

II.A— Profil de vitesse dans une conduite cylindrique

□—5. Pour un fluide en écoulement incompressible : $\frac{D\rho(M,t)}{Dt} = 0$

□—6.

- pour un fluide incompressible : $\rho = \text{cste}$; ce qui donne $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ et $\text{div}(\rho \vec{v}) = \rho \text{div}(\vec{v})$, soit donc d'après l'équation locale de conservation de la masse : $\text{div}(\vec{v}) = 0$;
- Le débit volumique D_V se conserve : $D_V = \text{cste}$.

□—7. Le nombre de REYNOLDS étant sans dimension, par analyse dimensionnelle; $[\eta] = \underbrace{[\rho]}_{ML^{-3}} \underbrace{[v_m]}_{LT^{-1}} \underbrace{[a]}_L$,

donc : $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$. On en déduit l'unité de η : $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$

□—8.

- **écoulement laminaire** : l'ensemble du fluide s'écoule dans la même direction.
- **écoulement turbulent** : enchevêtrement des lignes de champs.

□—9. L'énoncé propose un champ sous la forme $\vec{v} = v(r, z)\vec{e}_z$. L'écoulement étant incompressible $\Rightarrow \text{div}(\vec{v}) = 0$, ce qui donne, d'après l'expression de la divergence en coordonnées cylindriques, $\frac{\partial v(r, z)}{\partial z} = 0$, ainsi la vitesse ne dépend pas de z , donc on peut chercher un profil de vitesse sous la forme : $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$.

□—10. L'accélération de la particule fluide est : $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$, avec :

- $\frac{\partial \vec{v}(r)}{\partial t} = \vec{0}$, régime permanent;
- $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v(r) \frac{\partial v(r)}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{0}$;

Ce qui donne : $\vec{a} = \vec{0}$. Donc la particule fluide est animée d'un mouvement rectiligne uniforme (MRU).

□—11. La résultante des forces pressantes :

$$d\vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}}(p(r, z)) d\tau = -2\pi \left(\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \vec{e}_z \right) r dr dz \quad (5)$$

□–12. Commentaires :

- **Erreur d'énoncé** : La question demande d'exprimer la résultante des forces de viscosité $d\vec{F}_\eta = dF_\eta \vec{e}_z$ qui s'exercent sur la particule fluide en fonction de η , r , $\frac{dv}{dz}$ et dz . Il faut remplacer $\frac{dv}{dz}$ par $\frac{dv}{dr}$;
- Pour aborder cette question, il manque la donnée du Laplacien en coordonnées cylindriques. Pour un champ vectoriel $\vec{X} = X(r)\vec{e}_z$, l'expression du Laplacien, en coordonnées cylindriques, est : $\Delta \vec{X} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dX(r)}{dr} \right) \vec{e}_z$.

On a $d\vec{F}_\eta = \eta \Delta \vec{v} d\tau$. Ce qui donne :

$$\boxed{d\vec{F}_\eta = 2\pi \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) r dr dz \vec{e}_z} \quad (6)$$

□–13. Par application du principe fondamental de la dynamique, On a : $dm \vec{a} = d\vec{F}_p + d\vec{F}_\eta$, comme l'accélération de la particule fluide est nulle, alors $d\vec{F}_p + d\vec{F}_\eta = \vec{0}$.

$$-2\pi \left(\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial p(r, z)}{\partial z} \vec{e}_z \right) r dr dz + 2\pi \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) r dr dz \vec{e}_z = \vec{0} \quad (7)$$

On projette l'équation (7) sur \vec{e}_z il vient :

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial z} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) \quad (8)$$

Pour retrouver l'expression demandée, il faut montrer que la pression ne dépend pas de r , c'est l'objet de la question suivante !.

□–14. On projette l'équation (7) sur l'axe \vec{e}_r , on trouve :

$$\frac{\partial p(r, z)}{\partial r} = 0 \quad (9)$$

Ce qui signifie que la pression est indépendante de r et il ne dépend que de z . soit :

$$\frac{dp(z)}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) \quad (10)$$

D'après l'expression (10), c'est l'égalité entre deux fonctions : l'une ne dépend que de z ($\frac{dp(z)}{dz}$) et l'autre ne dépend que de r ($\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right)$), on déduit que : $\frac{dp(z)}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = \text{cte}_1$

La pression est donc une fonction affine de z , elle est décroissante car $v(r)$ décroît avec r c'est-à-dire $\frac{dp(z)}{dz} = \text{cte}_1 < 0$.

On a montré que $\frac{dp(z)}{dz} = \text{cte}_1$, par intégration $p(z) = \text{cte} z + \text{cte}_2$, on utilise les valeurs de la pression pour $z = 0$ et $z = L$, on trouve que :

$$\boxed{p(z) = p(z = 0) - \frac{\Delta P}{L} z} \quad (11)$$

Où $\Delta P = p(z = 0) - p(z = L)$

□—15. Le fluide est visqueux (fluide réel) les particules adhèrent les obstacles à cause de sa viscosité, d'où : $v(r = a) = 0$.

□—16. D'après les expressions (10) et (11), on a :

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) = \frac{dp(z)}{dz} = -\frac{\Delta P}{L}$$

ce qui donne après une première intégration : $r \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r^2 + C_1$, la vitesse est une fonction continue de r donc sa dérivée $\frac{dv(r)}{dr}$ est finie $\forall r \in [0, a]$, alors pour $r = 0$, on a $0 \times \frac{dv(r)}{dr}|_{r=0} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \times 0 + C_1$, ce qui donne $C_1 = 0$, soit donc : $\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$. Une deuxième intégration donne : $v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + C_2$, On a $v(r = a) = 0$, on déduit que $C_2 = \frac{a^2 \Delta P}{4\eta L}$. Soit finalement :

$$\vec{v} = v_0 \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) \vec{e}_z \quad (12)$$

Avec $v_0 = \frac{a^2 \Delta P}{4\eta L}$.

□—17. Le profil du champ des vitesses est représenté figure (1) :

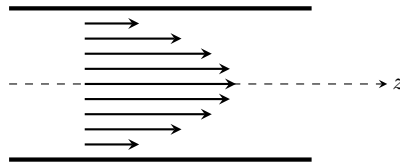


Figure 1: Profil du champ des vitesses.

Commentaires :

- La vitesse est non uniforme sur une section droite perpendiculaire à l'axe (Oz);
- la vitesse est maximale sur l'axe (Oz).

□—18. Par définition, le débit volumique du fluide est donné par l'expression : $D_V = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S}$
On a $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{e}_z$, ce qui donne

$$D_V = \frac{a^2 \Delta P}{4\eta L} \int_0^a \left(1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

Soit finalement :

$$D_V = \varepsilon \frac{a^4}{L\eta} \Delta P \quad (13)$$

Avec : $\varepsilon = \frac{\pi}{8}$.

□—19. Par définition, la vitesse moyenne v_m du fluide est donnée par :

$$v_m = \frac{D_V}{\pi a^2}$$

Ce qui donne :

$$v_m = \frac{a^2 \Delta P}{8\eta L} \quad (14)$$

□—20. **Application numérique** : $v_m = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{m/s}$ et $R_e = 117$
 On a : $R_e \ll 1000 \Rightarrow$ écoulement laminaire.

II.B— Vélométrie laser

□—21. La longueur d'onde $\lambda_0 = 514,5 \text{ nm}$ correspond à la couleur verte.

□—22. $\vec{k}_1 = k_0 (\cos \alpha \vec{e}_x - \sin \alpha \vec{e}_z)$ et $\vec{k}_2 = k_0 (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z)$.

□—23. On a : $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$, donc $s(M, t) = S_0 \cos(\varphi_1(M, t)) + S_0 \cos(\varphi_2(M, t))$
 $\Rightarrow s(M, t) = 2S_0 \cos\left(\frac{\varphi_1(M, t) + \varphi_2(M, t)}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t)}{2}\right)$

Soit finalement :

$$s(M, t) = 2S_0 \cos(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0) \cos(k_0 z \sin \alpha) \quad (15)$$

On en déduit l'expression de l'amplitude de l'onde résultante : $S(M) = 2S_0 \cos(k_0 z \sin \alpha)$

□—24.

- **Non plane** : l'amplitude n'est pas uniforme à cause de l'existence du terme $\cos(k_0 z \sin \alpha)$;
- **Progressive selon x** : existence du terme $(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0)$;
- **Non stationnaire** : il y a propagation selon x ;
- **Monochromatique** : une seule fréquence ω .

□—25. Les deux sources sont synchrones et cohérentes donc on observe des interférences dans la zone de croisement des deux faisceaux laser.

□—26. Le déphasage entre les deux ondes en un point M du champ d'interférence est: $\varphi = \varphi_1(M, t) - \varphi_2(M, t) = \omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM} + \varphi_0 - (\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM} + \varphi_0)$, ce qui donne :

$$\varphi = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}$$

Soit donc :

$$\varphi = 2k_0 z \sin \alpha \quad (16)$$

L'intensité $I(M)$ s'écrit : $I(M) = \langle s^2(M, t) \rangle$, ce qui donne :

$$I(M) = \langle 4S_0^2 \cos^2(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0) \cos^2(k_0 z \sin \alpha) \rangle = 4S_0^2 \cos^2(k_0 z \sin \alpha) \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - k_0 x \cos \alpha + \varphi_0) \rangle}_{=1/2}$$

soit:

$$I(M) = 2S_0^2 \cos^2(k_0 z \sin \alpha)$$

Donc l'intensité peut se mettre sous la forme :

$$I(M) = I_{\max} \cos^2\left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0}\right) \quad (17)$$

Avec $\Lambda_0 = \frac{\lambda_0}{\sin \alpha}$.

□—27. On observe des franges (plans) brillantes d'équation $z = \text{cste}$. l'expression de l'interfrange i_0 est :

$$i_0 = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha} \quad (18)$$

□—28. Soit $2z_m$ la largeur du champ d'interférence à x donné, l'expression de l'intensité lumineuse diffusée par les particules est :

$$I(M) = \begin{cases} I_{\max} \cos^2 \left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0} \right) & \text{pour } |z| < z_m \\ 0 & \text{pour } |z| > z_m \end{cases}$$

L'allure de $I(M)$ est donnée figure (2) :

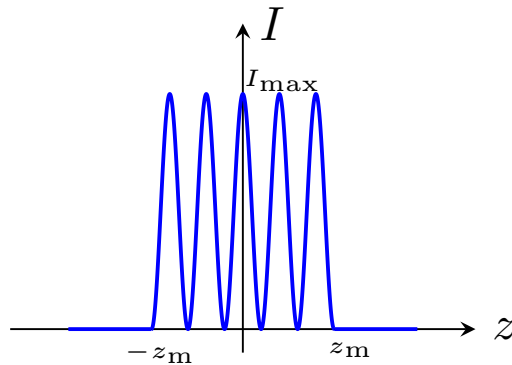


Figure 2:

□—29. $T = 0,67 \mu\text{s}$

□—30. L'expression de la vitesse V d'écoulement du fluide en supposant que le traceur suit parfaitement l'écoulement est : $V = \frac{i_0}{T}$, avec $i_0 = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha}$ est l'interfrange, donc :

$$V = \frac{\lambda_0}{2T \sin \alpha} \quad (19)$$

Application numérique : $V = 1,91 \text{ m.s}^{-1}$

□—31. Loi de Descartes : $n_a \sin \alpha = n_f \sin \alpha'$ avec $n_a = 1$, donc :

$$\sin \alpha = n_f \sin \alpha' \quad (20)$$

□—32. $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_f}$.

□—33. La nouvelle expression de l'interfrange i de la figure d'interférences est : $i = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha'}$.

Ce qui donne $i = \frac{\lambda_0}{n_f} \frac{n_f}{2 \sin \alpha} = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha} = i_0$, l'interfrange n'est pas modifié, donc il n'y a pas besoin de connaître l'indice optique du fluide pour pouvoir interpréter l'expérience et déterminer la vitesse d'écoulement.

□—34. Le nouveau déphasage $\varphi'(M) = \frac{2\pi\alpha z}{\lambda_0} + \frac{2\pi}{\lambda_0} (1 - n_l) e = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha z - a e u(t))$.

□—35. La position des franges brillantes est obtenue lorsque $\varphi'(M) = 2k\pi$ avec $k \in Z$, ce qui donne :

$$\boxed{z_k = \frac{\lambda_0 k + a e u(t)}{\alpha} ; k \in Z} \quad (21)$$

□—36. On a $V_0 = \frac{dz_k}{dt}$, ce qui conduit à :

$$V_0 = \frac{a e}{\alpha} \frac{du(t)}{dt}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{\alpha V_0}{a e} t + \text{cste}} \quad (22)$$

□—37. $T \nearrow$.

***** Fin de la correction *****