

PSI\* MARRAKECH

Corrige' Mines P1 PSI 2002

(1)

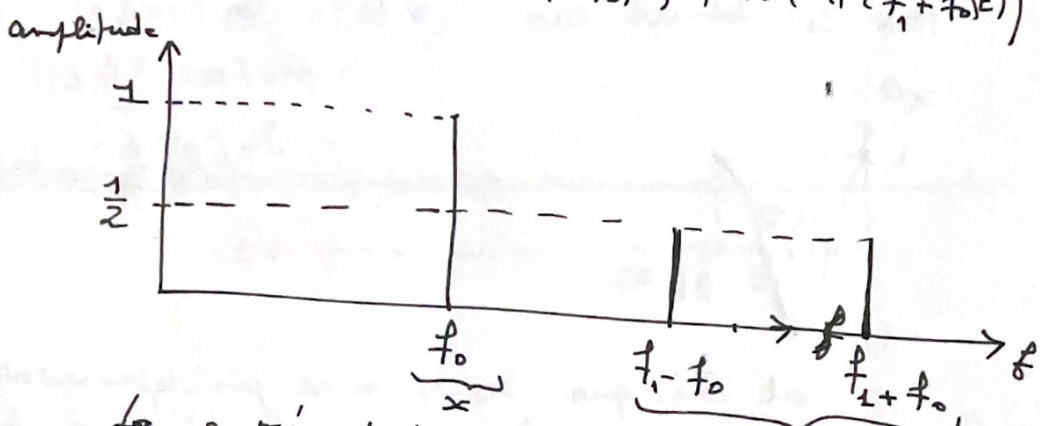
Fourier dans tous ses etats

I / Analyse de Fourier et echantillonnage d'un signal

Q (1)  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ ,  $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ ,  $f_1 > f_0$

$$x_e = x(t) * p(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t)$$

$$= \frac{1}{2} (\cos(2\pi (f_1 - f_0) t) + \cos(2\pi (f_1 + f_0) t))$$

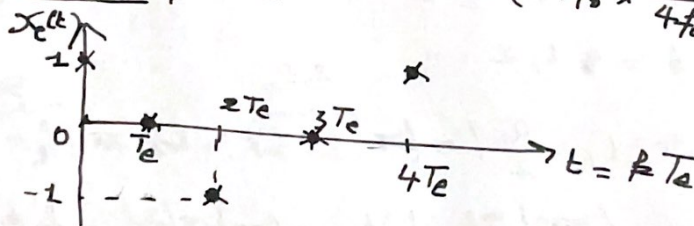


La representation est faite dans le cas  $f_1 - f_0 > f_0$

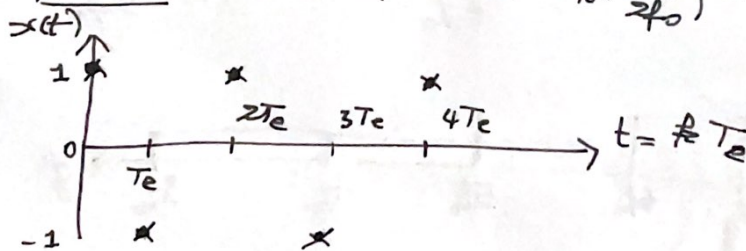
Q (2)  $x_e(t) = x(t) * w(t)$ ,  $x_e(t_k) = x(t_k)$

$$x_e(t) = x(t_k) = \cos(2\pi f_0 * t_k) = \cos(2\pi f_0 * \frac{k}{f_e})$$

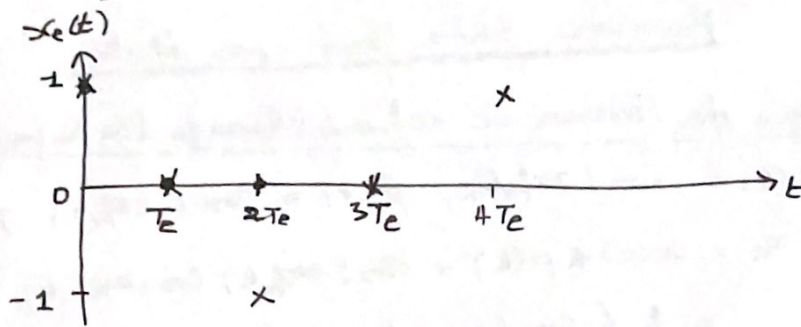
\*  $f_e = 4f_0$ ,  $x_e(t) = \cos(2\pi f_0 * \frac{k}{4f_0}) = \cos(k * \frac{\pi}{2})$



\*  $f_e = 2f_0$ ,  $x_e(t) = \cos(2\pi f_0 * \frac{k}{2f_0}) = \cos(k * \pi)$



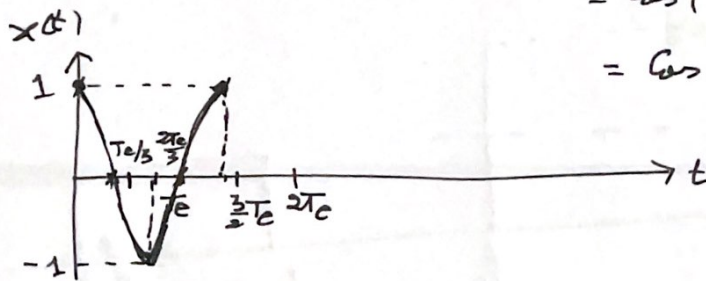
\*  $f_c = \frac{4f_0}{3}$ ,  $x_c(t) = \cos(2\pi f_0 \times \frac{3f_c}{4f_0}) = \cos(\frac{3\pi}{2} f_c t)$  (2)



Pour ce dernier cas :  $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

$$= \cos(2\pi \times \frac{3f_c}{4} t)$$

$$= \cos(\frac{6\pi}{4} \frac{t}{T_e}) = \cos(\frac{3\pi}{2} \frac{t}{T_e})$$



on voit bien que  $x_c(t)$  n'est pas représentatif du signal analogique  $x(t)$  dans le cas où  $f_c = \frac{4f_0}{3}$

Q(3)  $x_c(t) = x(t) \times w(t) = \cos(2\pi f_0 t) \times w(t)$

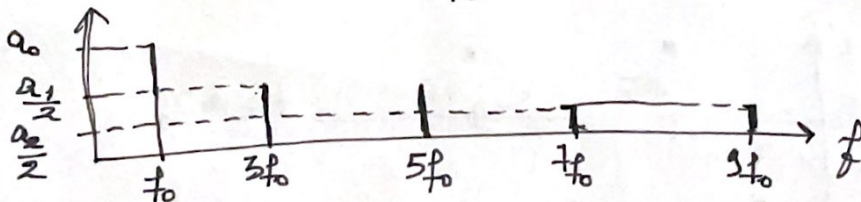
$$x_c(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \sum_1^{\infty} a_k \cos(2\pi f_0 t) \times \cos(2\pi k f_c t)$$

$$= a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{2} [\cos(2\pi(k f_c - f_0)t) + \cos(2\pi(k f_c + f_0)t)]$$

\*  $f_c = 4f_0$ ,  $k = 1, 2$

$$x_c(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \frac{a_1}{2} (\cos(2\pi (\frac{3f_0}{f_0} - 1)t) + \cos(2\pi (\frac{3f_0}{f_0} + 1)t)) + \frac{a_2}{2} (\cos(2\pi (\frac{2f_0}{f_0} - 1)t) + \cos(2\pi (\frac{2f_0}{f_0} + 1)t))$$

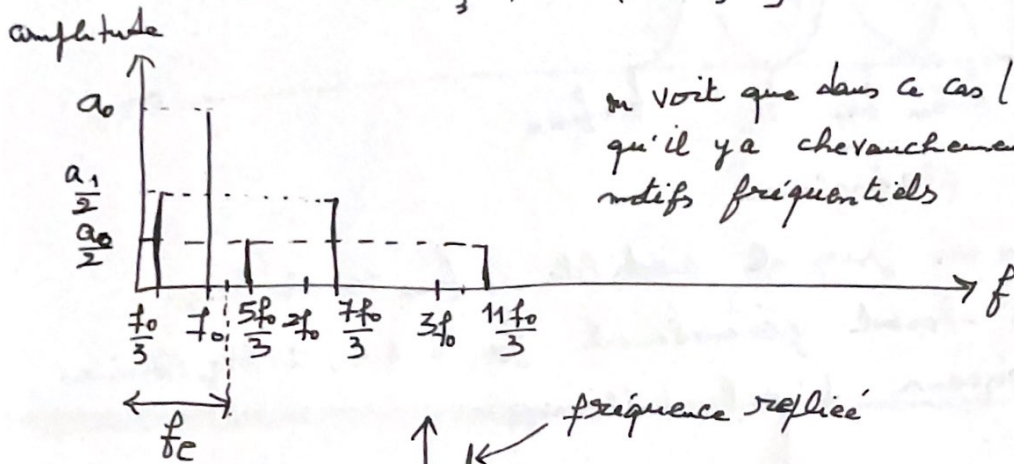
amplitude



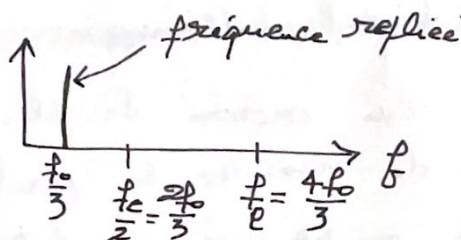
(3)

\*  $f_c = \frac{4}{3} f_0$

$$x_c(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \frac{a_1}{2} [\cos(2\pi \frac{f_0}{3} t) + \cos(2\pi \frac{7f_0}{3} t)] + \frac{a_2}{2} [\cos(2\pi \frac{5f_0}{3} t) + \cos(2\pi \frac{11f_0}{3} t)]$$



on voit que dans ce cas ( $f_c = \frac{4f_0}{3}$ ) qu'il y a chevauchement des motifs fréquentiels

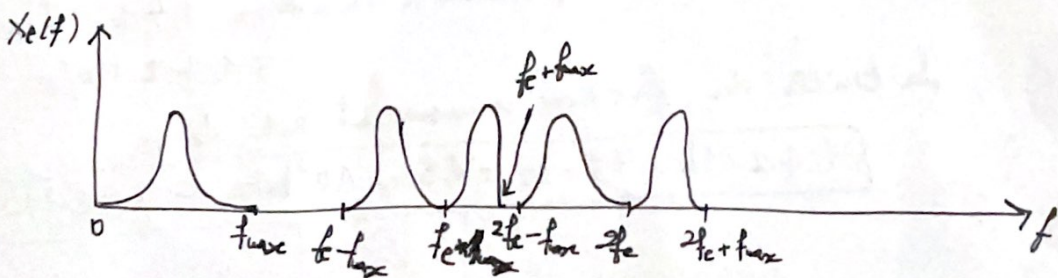


Le repliement a lieu autour de la fréquence  $\frac{f_c}{2}$

Q(4) pour éviter le repliement de spectre, il faut que  $f_c - f_0 > f_0 \Rightarrow \boxed{f_c > 2f_0}$

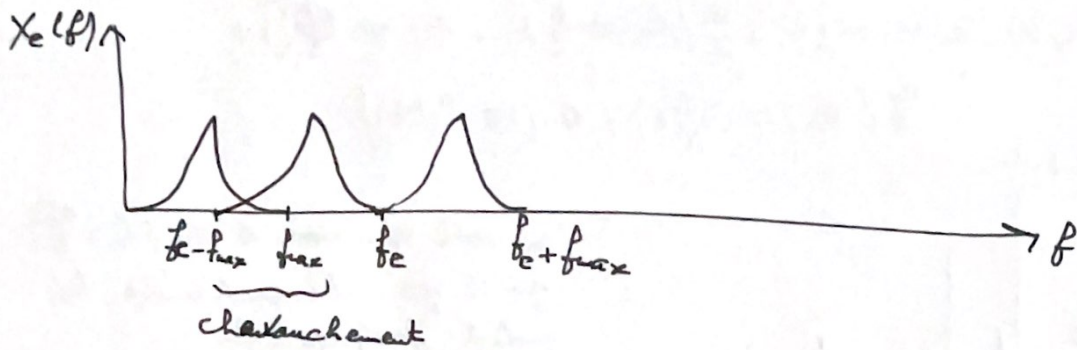
Q(5) Pour le signal  $x(f)$  faisant apparaître une fréquence maximale  $f_{max}$ , le critère de Shannon-Nyquist deviant.  $\boxed{f_c > 2f_{max}}$

\* 1<sup>er</sup> cas  $f_c > 2f_{max}$



2<sup>me</sup> cas  $f_e < 2f_{max}$  ( $f_c - f_{max} < f_{max}$ )

④



Pour un signal audible :  $f_{max} \approx 20 \text{ kHz}$   
 on choisit généralement  $f_e = 44,1 \text{ kHz}$  comme  
 fréquence d'échantillonnage.

Q(6) Le respect du critère de Shannon - Nyquist  
 nécessite de limiter le spectre du signal  $X(f)$   
 pour cela on utilise un filtre passe-bas appelé  
 filtre anti-repliement, de fréquence de coupure  
 $f_c > f_{max}$  (Avec  $f_{max} > \frac{f_e}{2}$ ),  $\boxed{\frac{f_c}{2} > \frac{f_e}{2}}$

Dans la bande passante  $[0, f_c]$ , il est  
 préférable d'avoir une fonction de transfert  
 $H$  tel que :  $|H| \approx 1$

Q(7) chaque mesure (échantillon) contient 16 bits  
 et l'enregistrement se fait sur 2 voies,  
 on aura donc :  $44100 \times 16 \times 2 = 1,41 \times 10^6 \text{ bits/s}$   
 $= 1,41 \text{ Mb/s}$

La taille du fichier musical est donc :

$$\boxed{1,41 \text{ Mb} \times 75 \times 60 = 6,35 \times 10^9 \text{ bits} \approx 794 \text{ Mo}}$$

(5)

## II - Analyse de Fourier et acoustique

Q ⑧ - Approximation acoustique :

- \*  $|P_1| \ll P_0$  (pression du fluide au repos)
- \*  $|\mu_1| \ll \mu_0$  ( $\mu_0 =$  masse volumique au repos)
- \*  $|v_1|$  très faible devant la célérité de l'onde sonore dans le fluide

- ordres de grandeur : pour une intensité sonore  $I$  de l'ordre de  $1 \text{ W/m}^2$

$$I = \langle p_1 v_1 \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 v_0^2 \left( \begin{array}{l} v_1 = v_0 \cos \omega t \\ p_1 = P_{01} \cos \omega t = \mu_0 c_s v_0 \cos \omega t \end{array} \right)$$

avec  $c_s \sim 340 \text{ m/s}$ ,  $\mu_0 \sim 1,3 \text{ kg/m}^3$

$$I = \frac{1}{2} P_{01} v_0 = \frac{1}{2} \mu_0 c_s v_0^2 = \frac{1}{2} \frac{P_{01}^2}{\mu_0 c_s}$$

$$* v_0 = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c_s}} \sim 7 \times 10^{-2} \ll c_s \rightarrow |v_1| \sim 7 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

$$* P_{01} = \frac{2I}{v_0} \sim 29 \text{ Pa} \ll P_0 \rightarrow |P_1| \sim 30 \text{ Pa}$$

$$* \mu_1 = \mu_0 \times \frac{P_{01}}{c_s^2} = \frac{P_{01}}{c_s^2} \rightarrow |\mu_1| \sim 3 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \ll \mu_0$$

- audible E [20 Hz, 20 kHz]  
human

Q ⑨  $\chi_s = - \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s \approx \frac{1}{\mu_0} \times \frac{\mu - \mu_0}{P - P_0}$

à l'ordre 1:  $\chi_s \approx \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1}$

Il est pertinent de l'introduire dans les calculs car l'étude de la propagation du son dans le fluide peut être résolue dans le cadre de petits mouvements isentropiques du fluide

$\chi_s$  mesure la variation du volume du fluide lorsque la pression est modifiée à entropie constante

⑥

Q (10) 1<sup>ère</sup> équation : équation de conservation de la

masse :  $\text{div}(\mu \vec{v}_1) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ . Au 1<sup>er</sup> ordre

elle devient : 
$$\boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}_1) = 0}$$

\* 2<sup>ème</sup> équation : équation d'EULER (fluide parfait)

$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = - \text{grad} P$ , on néglige l'effet de la pesanteur

Au 1<sup>er</sup> ordre, cette équation s'écrit :

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \text{grad} P_1}$$

Avec :  $\mu_1 = \chi_s \mu_0 P_1$ , on obtient :

(1)  $\boxed{\frac{\partial P_1}{\partial t} = - \frac{1}{\chi_s} \text{div}(\vec{v}_1)}$  et  $\boxed{\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \frac{1}{\mu_0} \text{grad} P_1}$  (2)

on prend la divergence de (2) et on dérive

(1) par rapport à t :  $(\text{div}(\text{grad} P_1) = \Delta P_1)$

$$\boxed{\Delta P_1 - \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = 0}$$

on pose  $\frac{1}{c_s^2} = \mu_0 \chi_s \Rightarrow \boxed{c_s = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}}$

Q (11)  $\underline{P}_1 = P_m e^{i(\omega t - kx)}$ , en injectant  $\underline{P}_1$  dans l'équation de propagation, on obtient  $k = \frac{\omega}{c_s}$

(2)  $\Rightarrow j\omega \underline{v}_1 = - \frac{1}{\mu_0} (-jk) \underline{P}_1 \vec{e}_x \Rightarrow \underline{v}_1 = \frac{k}{\mu_0 \omega} \underline{P}_1 \vec{e}_x = \frac{P_1}{\mu_0 c_s} \vec{e}_x$

donc :  $\boxed{Z_a = \mu_0 c_s}$

(7)

$Z_a$  est l'impédance acoustique du fluide

- onde réfléchie : (1)  $\Rightarrow j\omega \underline{P}_r = -\frac{1}{X_s} jk \underline{U}_r$

donc :  $\underline{U}_r = -X_s \frac{\omega}{k} \underline{P}_r = -X_s c_0 \underline{P}_r = -\frac{1}{Z_a} \underline{P}_r$

$\underline{U}_r(x,t) = -\frac{1}{Z_a} \underline{P}_r(x,t)$

- onde transmise (1)  $\Rightarrow j\omega \underline{P}_t = \frac{1}{X_s} jk \underline{U}_t$

donc :  $\underline{U}_t(x,t) = \frac{1}{Z_a} \underline{P}_t(x,t)$

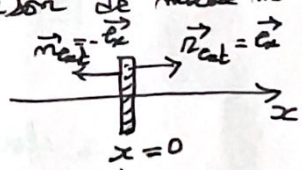
Q(12) La continuité de la brique acoustique en  $x=0$ , impose :

$\underline{U}_i(x=0^-,t) + \underline{U}_r(x=0^-,t) = \underline{U}_t(x=0^+,t), \forall t$

donc :  $\underline{U}_{im} + \underline{U}_{rm} = \underline{U}_{tm}$

Les déplacements sont très faibles devant la longueur d'onde caractéristique des variations de  $\underline{U}_i, \underline{U}_r$  et  $\underline{U}_t$ , l'égalité précédente reste valable.

Q(13) on applique le PFD à la cloison de masse  $m$  et on projette sur  $\vec{e}_x$



$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = (P_i(0,t) + P_r(0,t) - P_t(0,t)) S - k x(t)$

$\Rightarrow (-m\omega^2 + k) x(t) = (P_i + P_r - P_t) S$

$\frac{dx}{dt} = v_{cloison} = (U_i + U_r) = U_t \Rightarrow x = \frac{U_t}{j\omega}$

on remplace  $P_{tm}$  par  $-Z_a U_{tm} = -Z_a (U_{tm} - U_{im})$

8

cad :

$$P_{\text{em}} = -Z_a \left( \frac{P_{\text{em}}}{Z_a} - \frac{P_{\text{im}}}{Z_a} \right)$$

d'où :

$$P_{\text{em}} \left( \frac{\kappa - m\omega^2}{j\omega Z_a} + 2S \right) = S P_{\text{im}}$$

Ce qui donne :

$$H = \frac{P_{\text{em}}}{P_{\text{im}}} = \frac{S}{2S + \frac{\kappa}{2j\omega Z_a} - \frac{m\omega}{jZ_a}}$$

$$H = \frac{1/2}{1 + j \left( \frac{m}{2Z_a S} \omega - \frac{\kappa}{2Z_a \omega} \right)}$$

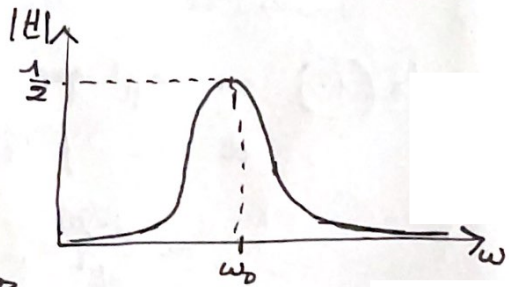
en identifiant avec l'expression de l'énoncé  
on peut écrire :

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

Avec

$$H_0 = \frac{1}{2}, \quad Q = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{m\kappa}{4Z_a}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$$

$$|H| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$



La cloison se comporte  
comme un filtre  
passe-bande vis-à-vis  
des ondes sonores

Pour  $\omega = \omega_0$ , la cloison entre en  
résonance.



Q (14) on peut négliger l'élasticité de la cloison ④  
 lorsqu'elle est construite de matériaux durs, c'est  
 aussi lorsque  $K$  est 'élevé', dans ce cas

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \gg \omega_b \rightarrow \boxed{H \approx \frac{H_0}{1 - jQ \frac{\omega_b}{\omega}}}$$

$$|H| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2}}$$

$|H| \rightarrow 0, \omega \ll \omega_0 \& Q$   
 $\rightarrow$  la cloison se  
 comporte comme un filtre  
 passe haut de 1<sup>er</sup> ordre

$$G_B = 20 \log |H| = G_{Bmax} - 20 \log \left(1 + \frac{|Q\omega_0|^2}{\omega^2}\right)$$

$$= G_{Bmax} - 40 \text{ dB (pour } f = 200 \text{ Hz)}$$

donc  $1 + \frac{(Q\omega_0)^2}{\omega^2} = 10^2 \Rightarrow \frac{(Q\omega_0)^2}{\omega^2} \approx 100$

$$\Rightarrow \frac{K}{2Za S} = 10\omega \Rightarrow \frac{m\omega_0^2}{2Za S} = 10\omega$$

d'où :  $\frac{\mu_c E \omega_0^2}{2 \mu_0 C_s} = 10\omega \Rightarrow \boxed{E = \frac{8 \times 10^3 \mu_0 C_s}{\mu_c \omega_0^2}}$

Q (15)  $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow [D] \equiv L^2 T^{-1}$

$L \rightarrow$  longueur,  $T \rightarrow$  temps  
 $\theta \rightarrow$  température,  $M \rightarrow$  masse

$D = f(\mu, \lambda, \kappa)$ , on pose  $D = \mu^\alpha \lambda^\beta \kappa^\gamma$

$$\mu \rightarrow M \cdot L^{-3}, \quad \lambda \rightarrow \frac{[J]}{\left[\frac{\partial T}{\partial x}\right]} \rightarrow \frac{W \cdot L^2 L}{\theta} = \frac{\text{Joule}}{T} \frac{L^{-1}}{\theta}$$

Joule  $\rightarrow$  Force  $\times L \rightarrow M \cdot L \cdot T^{-2} \times L$

donc  $\lambda \rightarrow M \cdot L \cdot T^{-3} \theta^{-1}$

$\kappa \rightarrow \frac{\text{Joule}}{\text{masse} \times \text{température}} \rightarrow L^2 T^{-2} \theta^{-1}$

finallement

$$L^2 T^{-1} \equiv M^{\alpha+\beta} L^{\beta-3\alpha+2\gamma} T^{-3\beta-2\gamma} \theta^{-(\beta+\gamma)}$$

(10)

ce qui impose :  $\alpha = -\beta$ ,  $\gamma = -\beta \Rightarrow \alpha = \gamma = -\beta$

$$\beta - 3\alpha + 2\gamma = 2 \Rightarrow \beta = +1, \alpha = -1 \text{ et } \gamma = -1$$

donc :

$$D = \frac{\lambda}{\mu_f c}$$

En ordre de grandeur, l'équation de la diffusion thermique permet d'écrire

$$\frac{T}{\tau} \sim D \frac{T}{L^2} \Rightarrow \tau \sim \frac{L^2}{D} = \frac{L^2 \mu_f c}{\lambda}$$

Alors

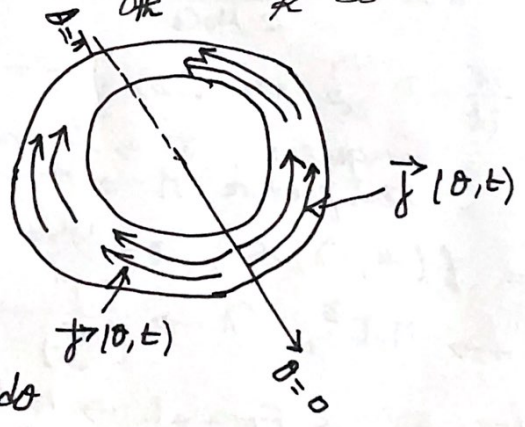
$$\tau \sim 1000 \text{ s}$$

Q (16) La loi de Fourier est donnée par :

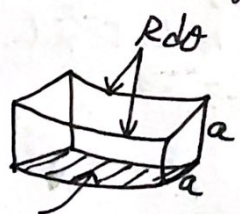
$$\vec{j}(r, t) = -\lambda \vec{g} \cdot dT = -\lambda \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

puisque  $a \ll R$ , on peut faire l'approximation

$$r \approx R \text{ et } \vec{j} \approx -\frac{\lambda}{R} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$



Q (17)



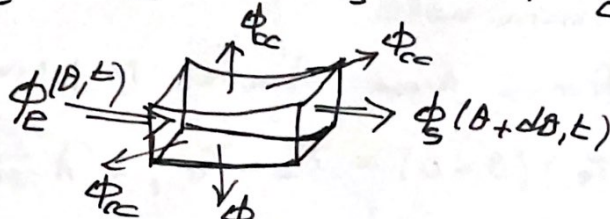
$$dV \approx a^2 R d\theta \quad (a \ll R)$$

$$dS = a R d\theta$$

$$dS_{\text{lat}} = 4 dS = 4 a R d\theta$$

on applique le 1<sup>er</sup> principe de la thermo-<sup>(11)</sup>  
dynamique au volume  $dV$

$$\frac{dU}{dt} = \phi_e(\theta, t) - \phi_s(\theta + d\theta, t) - \phi_{cc}(\text{fer} \rightarrow \text{air})$$



$$\frac{dU}{dt} = \mu_f 2d\theta a^2 c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \phi_e(\theta, t) = \lambda R(\theta, t) a^2$$

$$\phi_s(\theta + d\theta, t) = \lambda R(\theta + d\theta, t) a^2$$

$$\phi_{cc}(\text{fer} \rightarrow \text{air}) = 4Rd\theta a (T(\theta, t) - T_e) h$$

Avec un DL au 1<sup>er</sup> ordre

$$\begin{aligned} \phi_e(\theta, t) - \phi_s(\theta + d\theta, t) &= -a^2 \frac{\partial \lambda R}{\partial \theta} d\theta \\ &= +a^2 \times \frac{\lambda}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} d\theta \end{aligned}$$

donc :

$$\mu_f R a^2 c \frac{\partial T}{\partial t} d\theta = \frac{a^2 \lambda}{R} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} d\theta - 4R h a (T - T_e) d\theta$$

ce qui donne :

$$\boxed{\frac{\lambda}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{4h}{a} (T - T_e) = \mu_f c \frac{\partial T}{\partial t}}$$

(18) En régime stationnaire  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , l'équation de la diffusion thermique devient :

$$\frac{d^2(T - T_e)}{d\theta^2} - \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 (T - T_e) = 0, \text{ en posant: } \delta = \sqrt{\frac{a\lambda}{4h}}$$

$\delta$  a la dimension d'une longueur.

$$\text{solution: } \boxed{T(\theta) = T_e + A e^{\frac{R}{\delta} \theta} + B e^{-\frac{R}{\delta} \theta}}$$

(19)\* on voit sur le graphique la symétrie (19)  
de  $T(\theta, t)$  et de  $f_{th}(\theta, t)$

\*  $\frac{dT}{d\theta}(\theta = \pm \pi) = 0$ , en ce point la température est minimale

les conditions aux limites imposent:

$$(T - T_e)(\theta = 0) = T_1 - T_e, \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial \theta}(\pi) = 0$$

donc:  $A + B = T_1 - T_e$

$$A e^{\frac{\pi R}{\delta}} - B e^{-\frac{\pi R}{\delta}} = 0$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -e^{-\frac{\pi R}{\delta}} \\ T_1 - T_e & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\frac{\pi R}{\delta}} & -e^{-\frac{\pi R}{\delta}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = (T_1 - T_e) \frac{e^{-\frac{\pi R}{\delta}}}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi R}{\delta}\right)}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} e^{\frac{\pi R}{\delta}} & 0 \\ 1 & T_1 - T_e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{\frac{\pi R}{\delta}} & -e^{-\frac{\pi R}{\delta}} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = (T_1 - T_e) \frac{e^{\frac{\pi R}{\delta}}}{2 \operatorname{ch}\left(\frac{\pi R}{\delta}\right)}$$

donc

$$T - T_e = (T_1 - T_e) \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{R}{\delta}(\pi - \theta)\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi R}{\delta}\right)}$$

(20) si on prend en compte uniquement le phénomène de la diffusion thermique, la durée caractéristique de cette diffusion est:

$$\tau \sim \frac{L_{\text{diff}}^2}{\lambda} = \frac{(\pi R)^2 \mu_f c}{\lambda}$$

$\tau \sim 2^k 50 \text{ mn}$ . Les échanges thermiques par convection à la surface de l'anneau

de fer ne sont pas négligeables.

(13)

(21) Il suffit d'éliminer le terme de la convection dans l'équation précédente:

$$\boxed{\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{\mu_f c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}}$$

on pose  $T_n(\theta, t) = f_n(\theta) g_n(t)$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = g'_n(t) f_n(\theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = g_n(t) f''_n(\theta)$$

$$\text{donc} \quad \frac{1}{R^2} \frac{f''_n(\theta)}{f_n(\theta)} = \frac{\mu_f c}{\lambda} \frac{g'_n(t)}{g_n(t)}$$

Ces deux termes dépendent chacun de deux variables  $\theta$  et  $t$  indépendantes, ils ne peuvent être que constantes

$$\text{on pose} \quad \frac{\mu_f c}{\lambda} \frac{g'_n(t)}{g_n(t)} = d = \frac{1}{R^2} \frac{f''_n(\theta)}{f_n(\theta)}$$

$d$  est une constante homogène à une (distance)<sup>-2</sup>.

$g'_n(t) - d g_n(t) = 0$ , la solution de cette équation sera bornée si  $d < 0$ , on pose

$$d = -\frac{1}{\ell^2}, \text{ donc: } g'_n(t) + \frac{1}{\ell^2} g_n(t) = 0 \text{ et}$$

$$f''_n(\theta) + \left(\frac{R}{\ell}\right)^2 f_n(\theta) = 0. \text{ Solutions:}$$

$$* f_n(\theta) = A \cos\left(\frac{R}{\ell} \theta\right) + B \sin\left(\frac{R}{\ell} \theta\right)$$

$$* g_n(t) = g_{n0} e^{-\frac{1}{\ell^2} t}$$

En absence de chauffage imposé en  $(0=0)$  (14)  
 (ce qui n'est pas indiqué clairement par  
 l'énoncé):  $f_n(0=0) = 0 \Rightarrow f'(0=0) = 0$   
 $\Rightarrow B = 0$

donc 
$$T(0,t) = \frac{B_n}{A g_{ro}} \cos\left(\frac{R}{D}t\right) e^{-\frac{D}{L^2}t}$$

on a aussi:  $T(0,t) = T(2\pi, t)$ , donc:

$$B_n e^{-\frac{D}{L^2}t} = B_n e^{-\frac{D}{L^2}t} \cos\left(\frac{2\pi R}{L}\right) \quad \forall t$$

d'où  $\cos\left(2\pi \frac{R}{L}\right) = 1 \Rightarrow 2\pi \frac{R}{L} = n \times 2\pi$   
 $n \in \mathbb{N}^*$

donc: 
$$L_n = \frac{R}{n} = d_n$$

De plus:  $\frac{1}{\tau_n} = \frac{L_n^2}{D} = \frac{R^2}{n^2 D} = \frac{d_n^2}{D}$

ce qui impose: 
$$\tau_n = d_n^2 \frac{\mu_B c}{\lambda}$$

$\tau_n$  est homogène à un temps  
 $d_n$  est homogène à une distance.

(22) on a:  $T_0(0) = T(0, t=0) = T_m + \sum_1^{\infty} b_n \cos(n\theta)$

$T_m = \langle T \rangle_\theta$  = valeur moyenne de  $T$  par  
 rapport à  $\theta$ , à l'instant  $t=0$ , ou à  
 tout autre instant  $t \neq 0$ .

L'équation de la diffusion thermique  
 est linéaire, la solution générale  $T(\theta, t)$   
 est une superposition de la solution  
 précédente.

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t)$$

$$= T_m + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{\rho \theta}{a_n}\right) e^{-t/\tau_n}$$

$$\text{à } t=0, T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta)$$

$$\text{On identifie: } = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{\rho \theta}{a_n}\right)$$

$$\boxed{B_n = b_n} \text{ et } \boxed{\frac{\rho}{a_n} = n}, \quad \boxed{\tau_n = \left(\frac{\rho}{n}\right)^2 \frac{\mu c}{\lambda}}$$

23) si  $n \uparrow$ ,  $\tau_n \downarrow$ ,  $\frac{1}{\tau_n} \uparrow$  et  $e^{-t/\tau_n}$  tend vite vers 0 pour  $n$  grand. Le terme  $e^{-t/\tau_n}$  sera le plus important dans la somme précédente

$$\tau_1 \approx 1000 \text{ s}, \quad \tau_2 \approx 250 \text{ s}, \quad \tau_3 \approx 167 \text{ s}$$

Approximativement :

$$T(\theta, t) \approx T_m + B_1 e^{-t/\tau_1} \cos(\theta)$$

Ce qui confirme l'observation de Fourier

$$T(\theta, t) - T_m \approx B_1 e^{-t/\tau_1} \cos \theta \text{ est bien proportionnel à } \cos \theta$$