

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,  
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun  
École Mohammadia d'Ingénieurs  
EMI

**Concours National Commun d'admission  
aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou assimilées  
Session 2006**

**ÉPREUVE DE PHYSIQUE I**

**Filière PSI**

**Durée 4 heures**

Cette épreuve comporte 8 pages au format A4, en plus de cette page de garde  
L'usage de la calculatrice est *interdit*

**L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.  
L'usage de la calculatrice est interdit.**

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

## Premier problème Thermodynamique

On dispose d'un réservoir  $R$  de température constante de grande capacité, contenant un gaz diatomique  $G$ , sous une pression  $P_R = 25 \times 10^5$  Pa et une température  $T_0 = 300$  K constantes.

On admettra dans la suite que le volume de ce réservoir est tel que l'on pourra l'assimiler à un générateur de gaz comprimé parfait. C'est-à-dire que la pression dans le réservoir  $R$  est indépendante de la quantité de gaz qui peut en sortir.

On admettra de plus dans tout le problème que  $G$  est un gaz parfait diatomique rigide de masse molaire  $M = 28 \times 10^{-3}$  kg.mol<sup>-1</sup>. On prendra pour valeur de la constante des gaz parfaits  $R = 8,31$  J.K<sup>-1</sup>.mol<sup>-1</sup>.

### 1<sup>ère</sup> partie

#### Étude d'un réservoir à gaz

Un cylindre indéformable  $C$  isolé thermiquement de l'extérieur est séparé, à l'aide d'un piston  $\Pi$  à parois athermanes, en deux compartiments  $C_1$  et  $C_2$ , de volumes respectifs  $V_1$  et  $V_2$ . Le piston  $\Pi$ , de masse négligeable, peut glisser sans frottement tout en restant perpendiculaire à l'axe  $\Delta$  du cylindre  $C$  (figure 1).

$C_1$  peut être mis en communication avec le réservoir  $R$  par l'intermédiaire d'une vanne  $V_1$  et avec  $C_2$  par l'intermédiaire d'une vanne  $V_{12}$ .

$C_2$  peut être mis en communication avec un autre réservoir  $R_0$  au moyen d'une vanne  $V_2$ .

On négligera systématiquement tout transfert thermique à travers une vanne fermée.

1.1. On note  $\gamma$  le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant et on donne, pour les gaz diatomiques rigides,  $\gamma = \frac{7}{5}$ .

1.1.1. Donner un exemple de gaz diatomique.

1.1.2. Exprimer les capacités calorifiques molaires à volume constant  $c_v$  et à pression constante  $c_p$  pour un gaz parfait diatomique rigide en fonction de  $\gamma$  et  $R$ . Application numérique.

1.2. Le piston  $\Pi$  est bloqué. Le compartiment  $C_1$  de volume  $V_1 = 10$  L constant contient le gaz  $G$  à la température  $T_0 = 300$  K et sous la pression  $P_0 = 1 \times 10^5$  Pa. Les vannes  $V_{12}$  et  $V_2$  étant fermées, on ouvre *brutalement* la vanne  $V_1$  afin de remplir le compartiment  $C_1$  avec le gaz  $G$ .

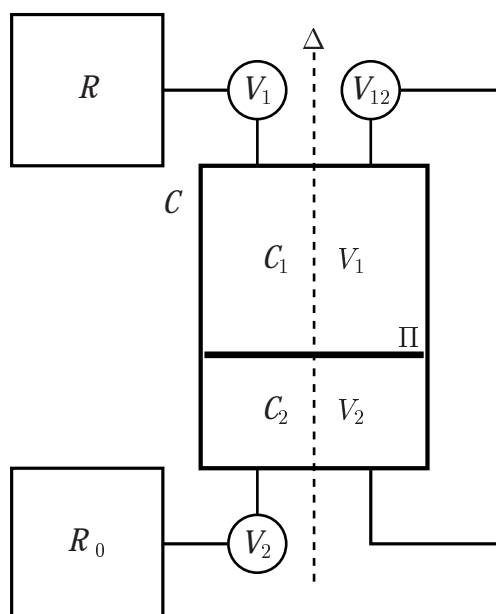


Figure 1: Réservoirs reliés à un cylindre à piston.

1.2.1. Exprimer la quantité de matière  $N_1$  du gaz contenu initialement dans le compartiment  $C_1$  en fonction des données du problème. Application numérique.

1.2.2. Que vaut la pression  $P_1$  dans le compartiment  $C_1$  à la fin de l'opération ?

1.2.3. Exprimer de même la quantité de matière  $N$  du gaz qui passe du réservoir  $R$  dans le compartiment  $C_1$  en fonction de  $R$ ,  $P_0$ ,  $P_R$ ,  $V_1$ ,  $T_0$  et de la température  $T_1$  du gaz contenu dans  $C_1$  à la fin de l'opération.

On considère comme système le gaz contenu initialement dans  $C_1$  (quantité de matière  $N_1$ ) et le gaz qui passe de  $R$  à  $C_1$  (quantité de matière  $N$ ).

1.2.4. Exprimer la variation  $\Delta U$  de l'énergie interne du système en fonction de  $N$ ,  $N_1$ ,  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $\gamma$  et  $R$ .

1.2.5. Exprimer le travail  $W$  reçu par le système en fonction de la pression  $P_R$  et du volume  $V_N$  qu'occupait la quantité de matière  $N$  du gaz dans le réservoir  $R$ .

1.2.6. En déduire la température finale  $T_1$  du gaz. Pour cela on pourra appliquer le premier principe de la thermodynamique après avoir montré que la transformation peut être considérée comme adiabatique. On exprimera  $T_1$  en fonction de  $P_R$ ,  $P_0$ ,  $T_0$  et  $\gamma$ . Application numérique.

1.3. Le piston  $\Pi$  étant toujours bloqué et le compartiment  $C_2$  parfaitement vide, on ferme la vanne  $V_1$  puis on ouvre la vanne  $V_{12}$ . La tuyauterie est thermiquement isolée de l'extérieur, mais permet l'échange thermique entre  $C_1$  et  $C_2$  quand  $V_{12}$  est ouverte. On donne  $V_1 = 10$  L et  $V_2 = 2,0$  L. Soit  $T_2$  la température du gaz lorsque l'équilibre est atteint.

1.3.1. Comment appelle-t-on une telle transformation ?

1.3.2. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que  $T_2 = T_1$ .

1.3.3. La transformation du gaz est-elle réversible ? Déterminer l'expression de la variation d'entropie  $\Delta S$  en fonction de  $P_R$ ,  $V_1$ ,  $V_2$  et  $T_1$ . On justifiera soigneusement la méthode utilisée.

Commenter le résultat obtenu.

1.3.4. Calculer numériquement  $\Delta S$  et commenter le résultat obtenu. On donne  $\ln \frac{6}{5} \approx 0,18$ .

1.3.5. L'état final du système dépend-il de l'ordre de fermeture et d'ouverture des vannes  $V_1$  et  $V_{12}$ ? Expliquer brièvement.

1.4. Le piston  $\Pi$  étant bloqué et la vanne  $V_{12}$  fermée, le compartiment  $C_1$  de volume  $V_1 = 10$  L est rempli à l'aide du réservoir  $R$ . La température du gaz contenu dans  $C_1$  est alors  $T_0 = 300$  K.

Le compartiment  $C_2$  est rempli à l'aide d'un réservoir  $R_0$  contenant un gaz parfait  $G_0$  à la pression  $P = \frac{P_R}{x}$ . On donne  $c_{v0} = 3R$  la capacité calorifique molaire à volume constant de  $G_0$  et on note  $\gamma_0$  son rapport de capacités calorifiques à pression constante et à volume constant.

Dans l'état initial, la température du gaz  $G_0$  contenu dans  $C_2$  est  $T_0 = 300$  K et on note le volume  $V_2^i$  du compartiment  $C_2$  sous la forme  $V_2^i = V_0 x$  où  $V_0 = 0,1$  L et  $x = \frac{P_R}{P}$  est un paramètre réel pouvant varier de 0 à  $x_{\max}$ .

Les vannes  $V_{12}$  et  $V_2$  restant fermées, la vanne  $V_1$  est à nouveau ouverte. On débloque le piston  $\Pi$  et on le bloque à nouveau dès que la pression est la même dans les deux compartiments.

1.4.1. Déterminer la quantité de matière  $n_2$  du gaz  $G_0$  dans le compartiment  $C_2$  en fonction de  $P_R$ ,  $V_0$  et  $T_0$ .

1.4.2. Donner l'expression du volume  $V_2$  occupé par le gaz de  $C_2$  dans l'état final en fonction de sa température  $T$  ainsi que de  $T_0$  et  $V_0$ .

1.4.3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, montrer que la température  $T(x)$  du gaz  $G_0$  contenu dans  $C_2$  est donnée par :

$$T(x) = \frac{3+x}{4} T_0$$

1.4.4. En déduire l'expression de  $V_2$  en fonction de  $V_0$  et  $x$ .

1.4.5. Déterminer la variation d'entropie  $\Delta S$  du gaz  $G_0$  contenu dans  $C_2$  en fonction de  $P_R$ ,  $V_0$ ,  $T_0$  et  $x$ .

1.4.6. Applications numériques

1.4.6.1. Calculer numériquement  $T$  et  $\Delta S$  pour  $x = 25$ . On donne  $\ln 2 \approx 0,69$  et  $\ln 3 \approx 1,1$ .

1.4.6.2. Déterminer la valeur numérique de  $\Delta S$  pour  $x = 1$  et pour  $x$  tendant vers zéro.

1.4.6.3. Déterminer  $x_{\max}$  ainsi que la valeur numérique de  $\Delta S$  lorsque  $x = x_{\max}$ . On donne  $\ln 7450 \approx 8,92$ .

1.4.7. Représenter  $\Delta S$  en fonction de  $x$  et commenter le graphique obtenu.

## 2<sup>ème</sup> partie

### Étude d'un moteur à piston

Un moteur à piston est constitué d'un cylindre calorifugé de volume  $V_A = 0,8$  L, muni de deux soupapes  $S_1$  et  $S_2$  et d'un piston  $\Pi$  athermane pouvant glisser sans frottement le long de l'axe du cylindre (figure 2). Le cylindre est relié à l'aide de la soupape  $S_1$  au réservoir à gaz  $R$  étudié en 1, rempli du gaz parfait  $G$ .

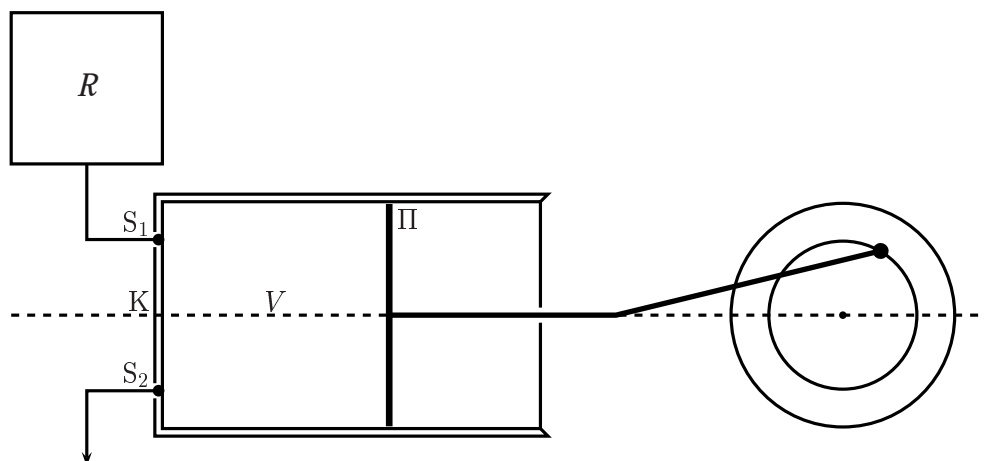


Figure 2: Moteur à piston.

2.1. Initialement le piston est placé contre la culasse K et le volume de gaz enfermé dans le cylindre est nul. La soupape  $S_2$  étant fermée, on ouvre la soupape  $S_1$  pour mettre le cylindre en communication avec le réservoir  $R$ . Le piston se déplace alors vers la droite jusqu'à ce que le volume  $V$  du gaz enfermé dans le cylindre soit égal à  $\frac{V_A}{\alpha}$ . Pour les applications numériques, on prendra  $\alpha = 5$ .

2.1.1. Que vaut la pression à l'intérieur du cylindre à la fin de cette première étape ? Comment appelle-t-on une telle transformation ?

2.1.2. Exprimer la quantité de matière  $n_0$  admise dans le cylindre à la fin de cette étape en fonction de  $P_R$ ,  $V_A$ ,  $\alpha$  et de la température  $T_1$  du gaz dans le cylindre.

2.1.3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, exprimer  $T_1$  en fonction de  $T_0$ .

2.1.4. Calculer numériquement  $n_0$ .

2.2. À la fin de la première étape, alors que la soupape  $S_2$  est toujours fermée, la soupape  $S_1$  se ferme et le gaz enfermé subit une détente adiabatique, que l'on suppose réversible, jusqu'à ce que le volume du cylindre soit égal à  $V_A$ .

2.2.1. Exprimer la pression  $P_2$  dans le cylindre à la fin de cette deuxième étape en fonction  $P_R$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$ . Application numérique. On donne  $5^{7/5} \approx 9,52$ .

2.2.2. Exprimer le travail  $W_2$  reçu par le gaz au cours de cette étape en fonction de  $P_R$ ,  $V_A$ ,  $\gamma$  et  $\alpha$ .

2.3. À la fin de la deuxième étape, la soupape  $S_2$  s'ouvre mettant le gaz contenu dans le cylindre en communication avec l'extérieur où la pression est  $P_0 = 1 \times 10^5$  Pa. Le piston reste d'abord immobile ( $V = V_A$ ) tant que la pression  $P \geq P_0$ , ensuite il est ramené vers la culasse jusqu'à  $V = 0$ . Un nouveau cycle peut alors commencer.

2.3.1. Tracer l'allure du diagramme de WATT donnant la pression  $P$  du gaz, en ordonnée, en fonction du volume  $V$  qu'il occupe. Indiquer les points remarquables et préciser le sens de parcours du cycle.

2.3.2. Déterminer l'expression du travail  $W_0$  fourni au gaz par le piston au cours d'un cycle en fonction de  $P_0, P_R, V_A, \gamma$  et  $\alpha$ . Application numérique.

2.3.3. Quel doit être, en régime stationnaire, le débit massique  $D_1$  du gaz pour que la puissance mécanique du moteur soit  $P = 1 \text{ kW}$ ? On donnera l'expression littérale de  $D_1$  en fonction de  $P, W_0, P_R, V_A, T_0, M, R, \gamma$  et  $\alpha$  et on calculera numériquement  $D_1$  en kg/h.

2.3.3.1. Calculer numériquement la durée  $\Delta t$  d'un cycle dans ces conditions.

### 3<sup>ème</sup> partie

#### Étude d'un moteur à turbine

Un moteur à turbine (figure 3) est constitué d'une tuyère  $\tau$  calorifugée, au milieu de laquelle se trouve une turbine  $T$ . Le gaz  $G$  du réservoir  $R$  de la partie 1, est injecté à l'entrée de la tuyère. Il actionne la turbine puis sort dans l'atmosphère, à la pression  $P_0$  avec une vitesse négligeable. On s'intéresse au régime de fonctionnement stationnaire.

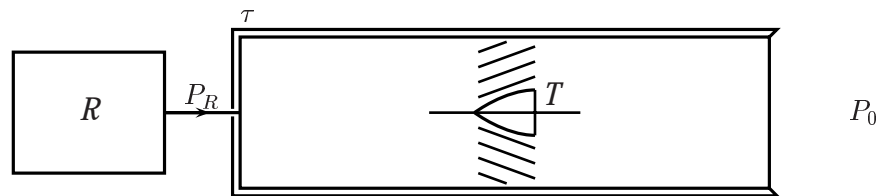


Figure 3: Moteur à turbine.

3.1. On suppose que le gaz  $G$  subit une détente adiabatique réversible. Soit  $W_T$  le travail fourni à une mole de gaz par la turbine.

3.1.1. Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert.

3.1.2. En déduire que, dans le cas du modèle de moteur à turbine étudié, le travail  $W_T$  est simplement relié à la variation d'enthalpie molaire du gaz entre l'entrée et la sortie de la tuyère.

3.1.3. En déduire l'expression de  $W_T$  en fonction de  $T_0, P_0, P_R, \gamma$  et  $R$ . Application numérique. Préciser le signe de  $W_T$  et commenter le résultat obtenu. On donne  $5^{4/7} \approx 2,51$ .

3.1.4. Quel doit être le débit massique  $D_2$  pour que la turbine ait une puissance  $P = 1 \text{ kW}$ ? On exprimera  $D_2$  en fonction de  $P, W_T$  et la masse molaire  $M$  du gaz  $G$ . Application numérique.

3.2. Pour tenir compte des irréversibilités, on admet que lors de la détente adiabatique, la pression  $P$  et le volume  $V$  sont reliés par la loi polytropique :

$$P V^k = \text{constante} \quad \text{avec} \quad k = 1,16$$

3.2.1. Déterminer, dans ces conditions, le travail  $W_T'$  fourni à une mole de gaz par la turbine. Application numérique. On donne  $5^{8/29} \approx 1,56$ .

3.2.2. Quel est le débit massique correspondant  $D_2'$  assurant une puissance  $P = 1 \text{ kW}$  de la turbine?

4<sup>ème</sup> partie

Étude d'un moteur à réaction

On utilise le réservoir  $R$  pour faire fonctionner un moteur à réaction. Le gaz  $G$  est envoyé dans une tuyère calorifugée  $\tau$  à la sortie de laquelle règne la pression  $P_0 = 1 \times 10^5$  Pa et où la vitesse du gaz n'est plus négligeable (figure 4). On s'intéresse au régime de fonctionnement stationnaire et on néglige la vitesse du gaz à la sortie du réservoir.

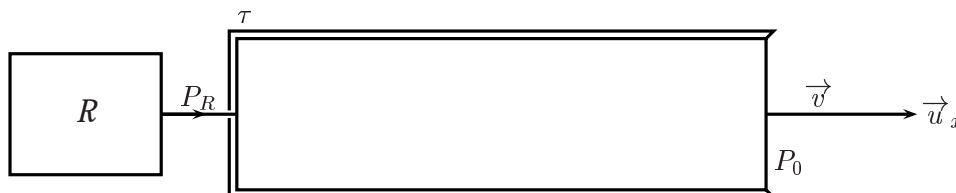


Figure 4: Moteur à réaction.

Pour tenir compte des irréversibilités, on admet la loi d'évolution polytropique :

$$P V^{k'} = \text{constante} \quad \text{avec} \quad k' = 1,04$$

- 4.1. En appliquant le premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert, exprimer la vitesse  $v$  d'éjection des gaz en fonction de  $M$ ,  $\gamma$ ,  $R$ ,  $T_0$ ,  $P_0$ ,  $P_R$  et  $k'$ . Application numérique. On donne  $5^{1/13} \approx 1,13$ .
- 4.2. Quel est le débit massique  $D_3$  du gaz permettant d'avoir une puissance cinétique d'éjection  $P = 1$  kW ?
- 4.3. Déterminer la force de poussée  $F$  du gaz sur le réacteur en fonction de  $D_3$  et  $P$ . Application numérique.

Deuxième problème  
Mécanique

On considère le système mécanique représenté figure 1. AB est une barre homogène de masse  $m$  et de longueur  $2\ell$ . L'extrémité A de la barre est assujettie à se déplacer, sans frottement, le long de l'axe matérialisé par  $Oy$ . On note G le centre d'inertie de la barre repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ . L'orientation de la barre dans le plan  $xOy$  est repérée par l'angle  $\theta$  qu'elle fait avec la verticale. Le champ de pesanteur est uniforme et donné par :

$$\vec{g} = g \vec{u}_x$$

En plus de son poids, la barre est soumise à l'action d'une force de rappel appliquée au point A et schématisée par un ressort de raideur  $k$  et de longueur  $\ell_0$  à vide. Au passage de l'extrémité A de la barre par l'origine O ( $y_A = 0$ ), la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide  $\ell_0$ .

On s'intéresse aux mouvements d'oscillation de la barre AB dans le plan  $xOy$ . Toute l'étude sera menée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On donne le moment d'inertie  $J$  de la barre AB par rapport à un axe  $\Delta$  perpendiculaire à la barre et passant par son centre d'inertie G :

$$J = \frac{m \ell^2}{3}$$

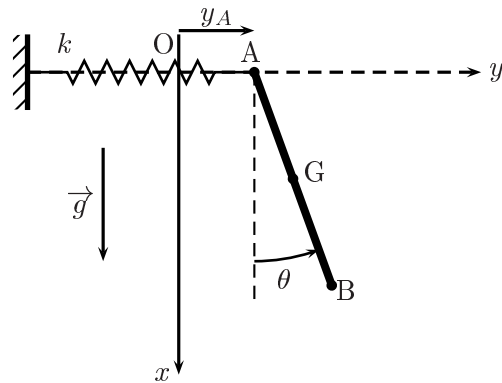


Figure 1: Système mécanique.

### 1<sup>ère</sup> partie

#### Mise en équation

#### 1.1.

1.1.1. Exprimer  $x$  en fonction de  $\ell$  et  $\theta$ .

1.1.2. Exprimer de même la coordonnée  $y_A$  donnant la position de l'extrémité A de la barre,  $y_A = \overrightarrow{OA} \cdot \vec{u}_y$ , en fonction de  $y$ ,  $\ell$  et  $\theta$ .

1.2. On se propose de déterminer les équations du mouvement de la barre.

1.2.1. Faire le bilan des efforts exercés sur la barre en mouvement et représenter schématiquement leurs résultantes sur une figure.

1.2.2. Écrire le théorème de la résultante cinétique (TRC) appliqué à la barre AB.

1.2.3. En déduire l'expression de la réaction  $\vec{R}$  de l'axe  $Oy$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\ell$ ,  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  ainsi qu'une équation du mouvement reliant  $y$ ,  $\ddot{y}$  et  $\theta$ . On posera :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1.2.4. Écrire le théorème du moment cinétique (TMC) en G.

1.2.5. En déduire, à l'aide d'une projection convenable, une deuxième équation du mouvement de la barre reliant  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\ddot{\theta}$  et  $y$ . On posera :

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$$

### 2<sup>ème</sup> partie

#### Étude des petites oscillations de la barre

On s'intéresse aux petits mouvements de la barre AB. Dans ce cas,  $y$  et  $\theta$  ainsi que toutes leurs dérivées temporelles sont supposés être des infiniment petits de premier ordre.

2.1. En linéarisant les équations du mouvement obtenues précédemment, montrer que, dans ce cas, le mouvement général de la barre est décrit par :

$$\begin{cases} \ddot{y} + \omega_1^2 y = \omega_1^2 z \\ \ddot{z} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2) z = 3\omega_1^2 y \end{cases}$$

où l'on a posé  $z = \ell \theta$ .

2.2. On cherche les modes propres d'oscillation de la barre sous la forme, en notation complexe :

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{A} \exp i \Omega t \\ \underline{z} = \underline{B} \exp i \Omega t \end{cases}$$

où  $i$  est le nombre complexe de module 1 et d'argument  $+\frac{\pi}{2}$ .  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont deux constantes complexes.

2.2.1. Montrer que  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont solutions du système linéaire homogène suivant :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2) \underline{A} - \omega_1^2 \underline{B} = 0 \\ -3\omega_1^2 \underline{A} + (3\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2) \underline{B} = 0 \end{cases}$$

2.2.2. À quelle condition ce système admet-il des solutions non identiquement nulles ?

2.2.3. En déduire que  $\Omega$  est solution de l'équation :

$$\Omega^4 - (4\omega_1^2 + \omega_2^2) \Omega^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0$$

2.2.4. Montrer alors que, dans le cadre des petites oscillations, le mouvement libre le plus général est donné par :

$$\begin{cases} \underline{y} = \underline{A}_1 \exp i \Omega_1 t + \underline{A}_2 \exp i \Omega_2 t \\ \underline{z} = \underline{B}_1 \exp i \Omega_1 t + \underline{B}_2 \exp i \Omega_2 t \end{cases}$$

et donner les expressions de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  en fonction de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . On prendra  $\Omega_1 > \Omega_2$ . Comment détermine-t-on  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$ ,  $\underline{B}_1$  et  $\underline{B}_2$  ?

2.3. Initialement ( $t = 0$ ), l'extrémité A étant au repos en O, on écarte la barre AB d'un angle  $\theta_0 > 0$  très faible par rapport à la verticale et on la lâche sans vitesse initiale.

2.3.1. Déterminer les constantes  $\underline{A}_1$ ,  $\underline{A}_2$ ,  $\underline{B}_1$  et  $\underline{B}_2$ .

2.3.2. Que vaut  $y(t)$  ? Commenter.

2.3.3. En déduire l'expression de  $\theta(t)$  en fonction de  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\theta_0$  et  $t$ . L'expression obtenue semble-t-elle en accord avec le résultat de la question 2.3.2. ? Expliquer.

FIN DE L'ÉPREUVE