L'énoncé de cette épreuve comporte 11 pages.

- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

L'épreuve se compose de deux problèmes indépendants.

Problème I - OPTIQUE

Données :

- Constante des gaz parfaits : R = 8,314 $J.K^{-1}.mol^{-1}$.
- Masse molaire de l'air : M_a = 29 $g.mol^{-1}$.
- Fonction sinus cardinal : $\sin c(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.
- Les grandeurs complexes sont notées aves des lettres soulignées et exprimées avec j tel que $j^2 = -1$.

Ce problème propose l'étude de quelques propriétés d'un télescope monté en Cassegrain. Il se compose de trois parties largement indépendantes.

1ère partie
Etude et propriétés des télescopes

1.1. Questions de cours

1.1.1. Expliquer ce qu'est l'approximation de l'optique géométrique.

1.1.2. Qu'appelle-t-on système optique centré ?

1.1.3. Rappeler brièvement les conditions de l'approximation de Gauss.
Quelles sont les propriétés d'un système optique centré utilisé dans ces conditions ?

Dans la suite du problème, les systèmes optiques étudiés seront considérés centrés et utilisés dans les conditions de Gauss.

1.2. Etude d'un miroir sphérique

On considère un miroir sphérique de rayon *R*, de centre *C*, de sommet *S*, et de diamètre d'ouverture D (figure 1).

Dans les conditions de Gauss, on rappelle que la relation de conjugaison reliant la position d'un point objet A sur l'axe à celle de son image A' est donnée par

$$\frac{1}{\overline{SA'}}+\frac{1}{\overline{SA}}=\frac{2}{\overline{SC}}$$

On rappelle aussi le grandissement avec origine au sommet : $\gamma=-\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$

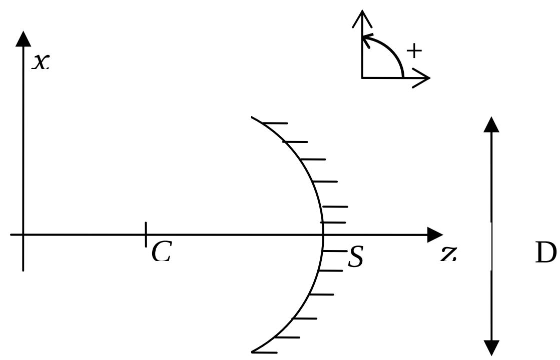

Figure 1

1.2.1. Définir et donner la position des foyers objet F et image F' de ce miroir sphérique. Exprimer la distance focale du miroir $f=\overline{SF}$ en fonction de R.

1.2.2. On observe deux étoiles A et B à l'aide du miroir sphérique de la figure 1. Les deux étoiles sont séparées d'un angle α petit (α est compté positif) : A se trouve sur l'axe optique et B est au-dessus de l'axe optique.

1.2.2.1. Construire soigneusement la position de leurs images respectives A' et B'.

1.2.2.2. Déterminer la position des deux images A' et B', la taille $\overline{A'B'}$ et la nature de l'image.

1.2.2.3. Comment a-t-on intérêt à choisir le rayon R du miroir utilisé ?

1.2.2.4. Application numérique : on donne α = 2 secondes d'arc et $R=$ 28,76 m. Déterminer la taille de l'image.

1.2.3. On place dans le plan où se forment les deux images A' et B' une caméra numérique CCD composée d'une matrice rectangulaire de détecteurs élémentaires, appelés pixels, de forme carrée, de côté h = 9 μm. Chacun de ces pixels mesure l'intensité lumineuse qu'il reçoit et transmet l'information correspondante séparément. Sa surface active est perpendiculaire à l'axe optique.

Quelle est la plus petite valeur α_{min} de l'angle α séparant les deux étoiles A et B que l'on peut espérer résoudre avec cette caméra ?

1.3. Etude du télescope Cassegrain

Pour l'observation d'objets célestes, on n'utilise pas un simple miroir sphérique mais une combinaison de plusieurs d'entre eux avec des formes différentes.

Le *Very Large Télecsope* (VLT) au chili est composé de quatre télescopes montés en Cassegrain. Ces télescopes pourront fonctionner indépendamment ou en association, totalisant alors (lorsque leurs faisceaux sont combinés) un télescope de puissance importante.

Afin de mener une étude quantitative et dans un souci de simplification, on peut modéliser un télescope réel de type Cassegrain par deux miroirs sphériques. Ainsi, dans les conditions de Gauss, le télescope réel est équivalent au télescope composé de deux miroirs sphériques (figure 2).

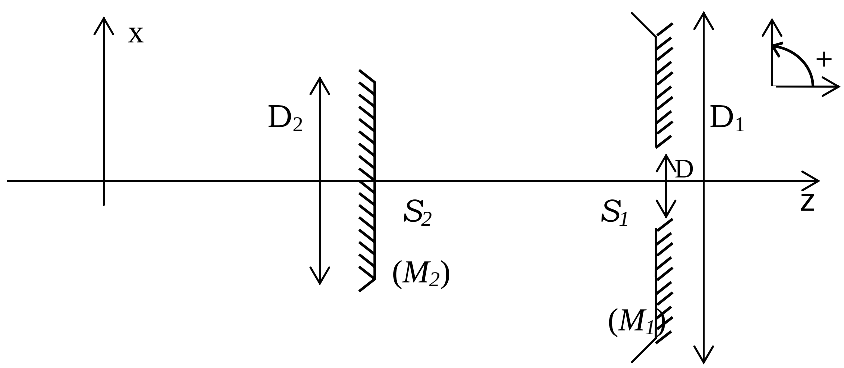

Figure 2 : *Télescope du VLT en configuration Cassegrain*

- Le miroir primaire (M_1) est concave, de sommet S_1, de foyer F_1, de distance focale f_1, de rayon R_1 = 28,76 m et de diamètre extérieur D_1 = 8,20 m. Il est percé d'un trou de diamètre D = 1 m en son centre.
- Le miroir secondaire (M_2) est convexe, de sommet S_2, de foyer F_2, de distance focale f_2, de rayon R_2 = 4,56 m et de diamètre extérieur D_2 = 1,12 m.

La distance entre les sommets des miroirs vaut d = $\overline{S_2S_1}$ = 12,4 m.

A l'aide du télescope ci-dessus, on observe les deux étoiles A et B de la question **1.2.2.**

1.3.1. Soit A_1 l'image de A par (M_1) et A_2 celle de A_1 par (M_2). Où se trouve l'image A_1 ? Que représente A_2 pour le télescope ? Déterminer $\overline{S_2A_2}$ en fonction de R_1, R_2 et d. Faire le calcul numérique.

1.3.2. Faire une construction soignée et détaillée des images B_1 et B_2 de l'étoile B par les miroirs successifs (M_1) et (M_2). On précisera aussi les images A_1 et A_2.

1.3.3. On note $\gamma = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}$ le grandissement transversal du miroir secondaire.

Déterminer $\overline{A_1B_1}$ et $\overline{A_2B_2}$ en fonction de R_1, γ et α.

1.3.4. On définit la focale équivalente du télescope par $f = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\alpha}$. Exprimer f en fonction de γ et R_1.

1.3.5. Application numérique : on donne α = 2 secondes d'arc.
Calculer la position du foyer image global F' du télescope (on donnera $\overline{S_1F'}$), le grandissement γ, la focale équivalente f du télescope et la taille $\overline{A_2B_2}$ de l'image finale.

Conclure sur l'avantage du télescope à deux miroirs par rapport à celui à un seul miroir.

1.3.6. On place dans le plan de front de l'image finale A_2B_2 la caméra CCD définie dans la question **1.2.3**.

Quel est la plus petite valeur α'_{min} de l'angle α séparant les deux étoiles A et B que l'on peut espérer résoudre avec cette caméra ? Comparer avec α_{min} obtenu en **1.2.3**. Conclure.

2ème partie
Diffraction par une fente

Dans cette partie, on prend en compte les effets de la diffraction sur les performances du télescope. Afin de simplifier les calculs, le télescope utilisé pour les observations astronomiques peut être modélisé par un objet diffractant et la lentille convergente équivalente au télescope dont la distance focale f est calculée dans la question **1.3.4**. L'objet diffractant est une fente transparente rectangulaire de centre O, de largeur a = D_1 (diamètre du miroir primaire) suivant OX, de grande dimension suivant l'axe perpendiculaire OY (figure 3).

On observe, à l'aide du télescope, une étoile B située dans la direction représentée par l'angle α (α est supposé petit). Cette étoile (supposée ponctuelle) émet une onde monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0.

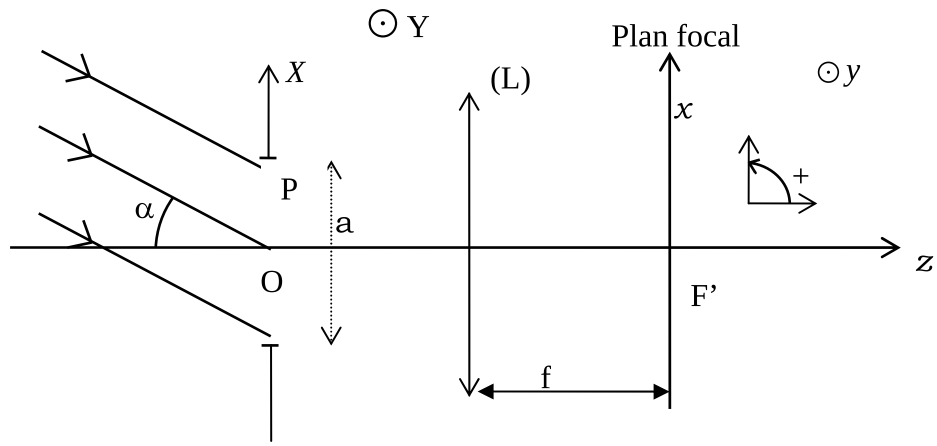

Figure 3

2.1. Présenter un montage (réalisable) permettant d'observer sur un écran la figure de diffraction « à l'infini » donnée par une fente rectangulaire de côtés a et b (b > a) sous incidence normale.

2.2. Rappeler le principe d'Huygens-Fresnel permettant de calculer l'amplitude de l'onde diffractée par une fente.

2.3. Expliquer en quelques lignes en quoi consiste la diffraction à l'infini (aussi appelée diffraction de Fraunhofer).

2.4. Que signifie "grande dimension" suivant OY ? Quelles sont les conséquences de cette hypothèse ?

2.5. Dans le cadre de la diffraction à l'infini, l'amplitude complexe en un point M de la vibration diffractée en un point P(X) de la fente est donnée par :

$$\underline{A}(M) = \underline{K}\int_X \exp\left[-j2\pi\frac{\delta(M)}{\lambda_0}\right]dX$$

$\underline{K}$ étant une constante et $\delta(M)$ la différence de marche, au point $M(x)$ du plan focal de la lentille (L), entre les deux vibrations diffractées respectivement aux points P et O de la fente. On notera n l'indice du milieu traversé par la lumière.

2.5.1. Calculer la différence de marche $\delta(M)$ en fonction de X, x, n, α et f .

2.5.2. Calculer l'amplitude $\underline{A}(M)$ au point M .

2.6. On rappelle que l'intensité lumineuse est définie par $I(M) = k\underline{A}(M)\underline{A}^*(M)$,

k étant une constante et $\underline{A}^*(M)$ le complexe conjugué de l'amplitude $\underline{A}(M)$.
Montrer que $I(M) = I(x) = I_0\left[\sin c(\frac{\pi n a}{\lambda_0}(\alpha + \frac{x}{f}))\right]^2$. Donner l'expression de I_0.

2.7. Représenter la figure de diffraction observée sur l'écran (plan F'xy). Préciser ses caractéristiques.

2.8. Tracer l'allure de la courbe représentative de l'intensité I(x). Préciser ses caractéristiques. En quel point cette intensité est-elle maximale ? Conclure.

3ème partie
Phénomènes limitant le pouvoir de résolution

On modélise toujours le télescope utilisé pour les observations astronomiques par la lentille convergente équivalente au télescope dont la distance focale f est calculée dans la question **1.3.4**. Cette lentille forme une pupille diffractante circulaire, de centre O, de diamètre a = D_1 (diamètre du miroir primaire).

La figure de diffraction dans le plan focal de la lentille peut être schématisée par une tache centrale brillante de rayon $R_0 = 1,22\frac{\lambda_0 f}{nD_1}$ entourée d'anneaux alternativement sombres et brillants.

3.1. Justifier qualitativement l'aspect de la figure de diffraction.

3.2. On observe à nouveau les deux étoiles A et B de la question **1.2.2** par le télescope. On rappelle que celles-ci sont vues avec un écart angulaire α petit.

3.2.1. A quelle condition sur α, D_1, λ_0 et n, les deux taches de diffraction seront-elles séparées sur l'écran ? On adoptera le critère de Rayleigh.

3.2.2. En déduire la résolution angulaire du télescope définie par la valeur minimale α'_{min} de α.

Rappel

<u>*Critère de Rayleigh*</u> : deux taches de diffraction peuvent être séparées si le maximum principal de l'une est confondu avec le premier minimum nul de l'autre.

3.3. Citer quelques phénomènes limitatifs du pouvoir de résolution d'un télescope terrestre.

3.4. Citer des méthodes permettant de s'affranchir des phénomènes limitatifs du pouvoir de résolution d'un télescope.

3.5. Pour quelles raisons construit-on tout de même de grands télescopes ?

4ème partie
Effet de la turbulence atmosphérique sur la structure d'un front d'onde

L'atmosphère terrestre est constituée de couches d'air de différentes températures qui se mélangent les unes aux autres causant de grands mouvements (appelés « turbulences ») dans les masses d'air. Pour les astronomes, ces turbulences sont néfastes car elles perturbent la trajectoire des rayons lumineux. Ce faisant, elles sont responsables du scintillement des étoiles dans le ciel et de la distorsion des images collectées par les télescopes.

Les turbulences de l'atmosphère créent des variations de la masse volumique de l'air et par conséquent entraînent des fluctuations de son indice de réfraction.

On admet que l'indice de réfraction de l'air est lié à sa masse volumique ρ par la relation empirique (dite de Gladstone) :

$$n = 1 + C\rho \text{ , } C \text{ étant une constante.}$$

4.1. Quelle est la dimension de la constante C.

4.2. En supposant que l'air se comporte comme un gaz parfait, exprimer n en fonction de la température T et de la pression P.

4.3. Calculer numériquement la constante C, sachant qu'à T = 293 K et P = 10^5 Pa, n = 1,00029.

4.4. On note T(z) et P(z) respectivement la température et la pression de l'atmosphère à l'équilibre à l'altitude z. Les fluctuations de la température et de la pression par rapport à l'équilibre se manifestent par des écarts δT et δP. Exprimer la fluctuation δn de l'indice n qui en résultent en fonction de δT et δP.

On étudie maintenant l'effet des variations de l'indice de l'atmosphère sur la structure du front d'onde émise par une étoile.

4.5. Définir ce qu'est une surface d'onde.

4.6. Enoncer le théorème de Malus.

4.7. Dans l'atmosphère d'indice n, on considère une zone cylindrique de diamètre r_0 et de hauteur e suivant Oz (figure 4). Cette zone est d'indice $n + \delta n$ (on prendra $\delta n > 0$). On considère une onde électromagnétique plane incidente progressive dans la direction des z croissants et de longueur d'onde dans le vide λ_0.

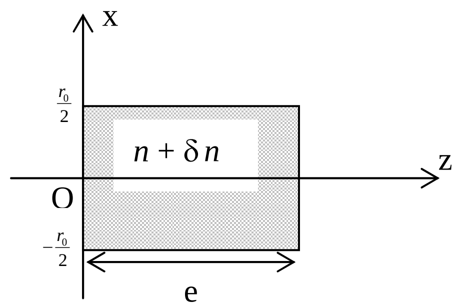

Figure 4

4.7.1. Calculer la phase $\varphi(x, z)$ de l'onde pour $z > 0$. On prendra comme origine des phases le point O et on distinguera les deux cas $|x| < r_0/2$ et $|x| > r_0/2$.

4.7.2. En déduire l'équation de la surface d'onde dans le plan (xOz).

4.7.3. Reprendre le schéma de la figure 4 et tracer une surface d'onde dans la zone $z < 0$, puis dans la zone $z > e$.

4.7.4. Conclure. Quelle méthode utilise-t-on en pratique pour corriger l'effet de la turbulence atmosphérique ?

Problème II - Onduleur

Ce problème étudie un onduleur de tension autonome. Le montage est celui représenté sur la figure 1.

K_1, K_2, K_3 et K_4 sont des interrupteurs bidirectionnels supposés parfaits. Ils fonctionnent simultanément deux à deux et sont commandés électriquement de telle façon que :

- pendant une demi-période, pour $nT < t < (n+\frac{1}{2})T$: K_1 et K_3 fermés, K_2 et K_4 ouverts,
- pendant une demi-période, pour $(n+\frac{1}{2})T < t < (n+1)T$: K_1 et K_3 ouverts, K_2 et K_4 fermés.

n est un entier et T est la période du signal de commande des interrupteurs.

Le générateur est une source de tension idéale de f.e.m E constante. L est une inductance pure dite de lissage et R une résistance pure qui représente la charge.

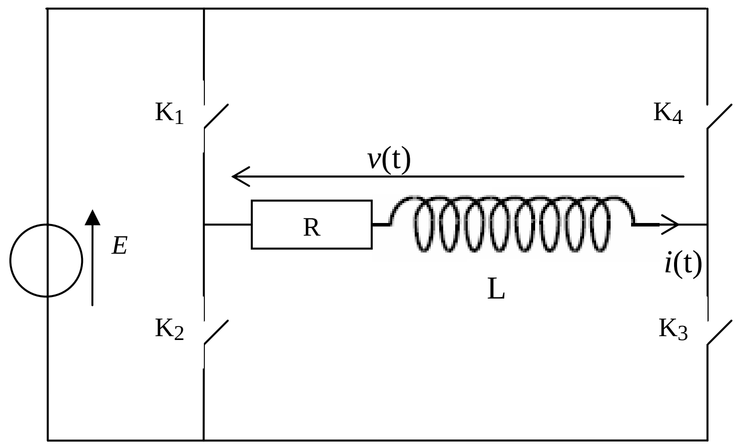

Figure 1

1. Quel est le rôle d'un onduleur ? Citer quelques applications de l'onduleur.

2. Tracer pour $t \in [0, 2T]$, la courbe $v(t)$ en indiquant les points remarquables.

3. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par le courant $i(\mathrm{t})$ qui circule dans la charge.

4. On note $i_1(t)$ la solution de l'équation différentielle établie dans la question précédente pour $0 < t < \frac{T}{2}$ et $i_2(t)$ celle pour $\frac{T}{2} < t < T$.

4.1. Déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de R, L et E. On note C_1 et C_2 les deux constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer dans cette question. On pose $\tau = \frac{L}{R}$.

On se place en régime permanent et on cherche à déterminer les expressions de C_1 et C_2. On pose $\alpha = \exp(-\frac{T}{2\tau})$.

4.2. Etablir deux relations entre C_1 et C_2. En déduire C_1 et C_2.

4.3. Achever la détermination des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Tracer, pour $t \in [0, 2T]$, la courbe $i(t)$ en indiquant les points remarquables.

5. On donne le développement en série de Fourier de la tension $v(t)$:

$$v(\mathrm{t}) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4E}{(2p+1)\pi} \sin\left((2p+1)\omega.t\right), \text{ où } p \text{ est un entier et } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

5.1. Justifier, *sans calcul*, ce développement.

5.2. Décrire en quelques lignes une méthode expérimentale de détermination de la valeur des coefficients de cette décomposition.

5.3. Exprimer, pour une composante $v_{2p+1}(\mathrm{t}) = \dfrac{4E}{(2p+1)\pi} \sin\left((2p+1)\omega.t\right)$ de la tension $v(t)$, le courant $i_{2p+1}(t)$ dans la charge en fonction de R, L, ω, E et de l'entier p.

5.4. Montrer que le développement en série de Fourier du courant $i(\mathrm{t})$ est donné par : $i(\mathrm{t}) = \sum_{p=0}^{\infty} I_{2p+1} \sin\left((2p+1)\omega.t + \phi_{2p+1}\right)$. Déterminer I_{2p+1} et ϕ_{2p+1}.

5.5. Déterminer le rapport $\beta = \dfrac{I_3}{I_1}$ et le calculer si ω = 1/τ. Le courant $i(\mathrm{t})$ est-il sinusoïdal ?

6. Pour avoir un courant $i(\mathrm{t})$ quasi-sinusoïdal, on modifie la commande des interrupteurs pour modifier la tension $v(t)$ et obtenir une tension $v'(t)$ représentée sur la figure 2 :

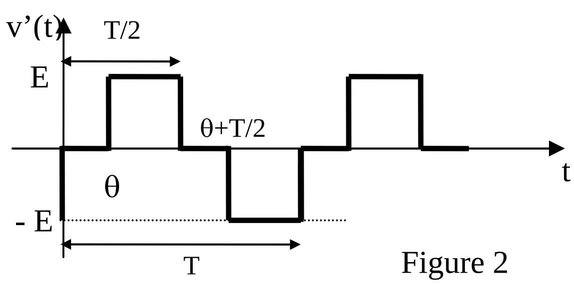

Figure 2

6.1. On admet que la décomposition en série de Fourier de la tension $v'(t)$ est donnée par :

$$v'(\mathrm{t}) = \frac{4E}{\pi}[\cos(\frac{\omega\theta}{2})\sin\left(\omega(t-\frac{\theta}{2})\right) + \frac{1}{3}\cos(\frac{3\omega\theta}{2})\sin\left(3\omega(t-\frac{\theta}{2})\right) + \frac{1}{5}\cos(\frac{5\omega\theta}{2})\sin\left(5\omega(t-\frac{\theta}{2})\right) + ...$$

Comment faut-il choisir θ pour que l'harmonique de rang 3 soit nul ? Dans ce cas, calculer pour la plus petite valeur positive de θ et pour $\omega = 1/\tau$, le rapport $\beta' = \dfrac{b'_5}{b'_1}$, où b'_5 est l'amplitude de l'harmonique de rang 5 et b'_1 est l'amplitude du fondamental du courant $i(\mathrm{t})$. Conclure.

6.2. Donner dans ces conditions en fonction de E et R, la puissance moyenne P_m reçue par la charge.

6.3. A.N. E = 200 V, $f = \dfrac{1}{T}$ = 1 kHz, R = 0,02 Ω, L = 0,07 mH. Calculer P_m.