ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun
Ecole Supérieure des Industries du Textile et de l'Habillement
ESITH

Concours National Commun d'admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou assimilées
Session 2010

ÉPREUVE DE PHYSIQUE I

Filière **PSI**

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 7 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Étude de la conversion de l'énergie éolienne

Dans le cadre du développement durable, on s'intéresse à la création de petites unités de production électrique à partir d'énergies renouvelables. On se propose ici d'étudier quelques dispositifs d'une éolienne de petite ou moyenne puissance, destinée à alimenter des sites isolés. Le problème est composé de trois parties.

Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

1ère partie
Transfert de puissance de l'air à l'éolienne

On s'intéresse dans cette partie au modèle d'écoulement axial de l'air autour de l'hélice d'une éolienne, située en $z = 0$ (voir figure 1), en faisant les hypothèses suivantes :

- L'air est considéré comme un fluide parfait, homogène et incompressible de masse volumique μ, en écoulement dans un référentiel $\mathcal{R}$ lié au sol et supposé galiléen.
- On suppose l'écoulement de l'air stationnaire et à symétrie de révolution autour de l'axe de rotation de l'hélice. La vitesse est supposée uniforme sur une section droite du tube de courant.
- La pression garde la même valeur sur une section droite du tube de courant. A grande distance de l'hélice, la pression est uniforme et égale à la pression atmosphérique notée p_0.
- Les sections S_A et S_B du tube de courant au niveau de l'hélice sont égales à S ($S_A \simeq S_B \simeq S$). On note p_A la pression sur S_A et p_B sur S_B.
- l'écoulement étant turbulent au niveau de l'hélice, on admet pour simplifier que la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'air est la même entre S_A et S_B.

1.1. Étude préliminaire de l'écoulement

1.1.1. Définir le débit massique et le débit volumique d'un fluide à travers une surface Σ.

1.1.2. Rappeler la loi de conservation de la masse sous sa forme locale et sous sa forme intégrale dans un volume V limité par une surface Σ.

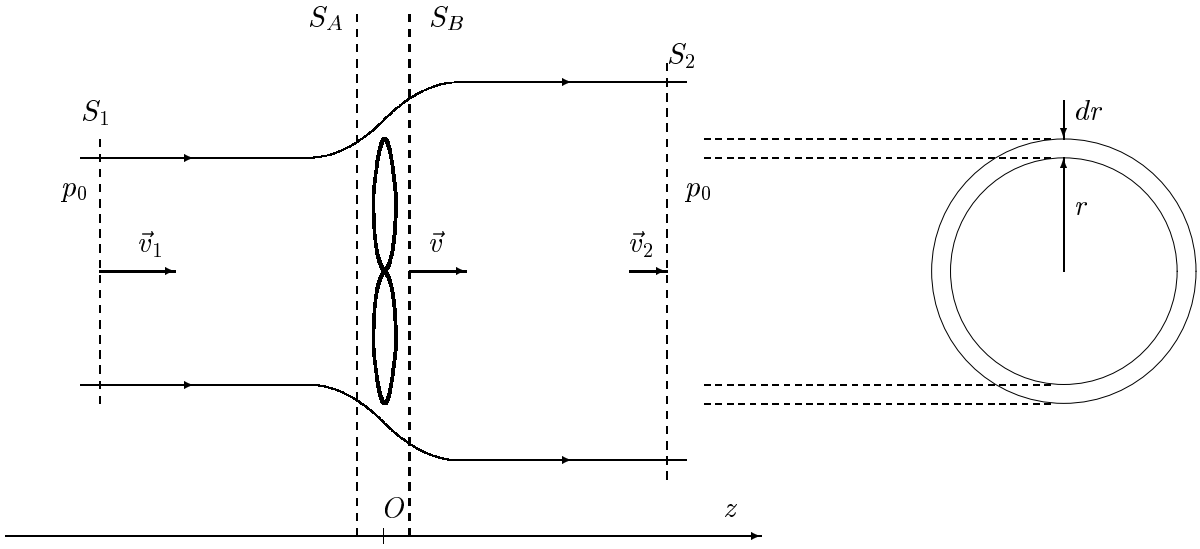

Figure 1: Écoulement axial de l'air autour d'une hélice

1.1.3. On désigne par $D_{m,1}$, D_m et $D_{m,2}$ les débits massiques de l'air à travers les sections S_1, S et S_2 respectivement du tube de courant de la figure 1. Montrer que ces débits massiques sont égaux : $D_{m,1} = D_m = D_{m,2}$.

1.1.4. En déduire deux relations entre S_1, S_2, S et les modules v_1, v_2 et v des vecteurs vitesses $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}$ respectivement.

1.1.5. Dans le cas d'un écoulement stationnaire, homogène et incompressible d'un fluide parfait, BERNOULLI a établi la relation :

$$\frac{v^2}{2} + e_{pm} + \frac{p}{\mu} = cste$$

Que représente cette équation ? Quelle est la signification physique de chacun des trois termes ?

Par la suite, on néglige les effets de la pesanteur.

1.2. Force exercée par l'air sur l'hélice

1.2.1. Écrire la relation de BERNOULLI suivant une ligne de courant entre les sections S_1 et S_A d'une part et entre les sections S_B et S_2 d'autre part. En déduire l'expression de la pression p_A en fonction de p_0, μ , v_1 et v, puis celle de p_B en fonction de p_0, μ, v_2 et v.

1.2.2. Écrire l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par l'air sur l'hélice en fonction de p_A, p_B, S et $\vec{e}_z$, puis en fonction de v_1, v_2, μ, S et $\vec{e}_z$; $\vec{e}_z$ étant le vecteur unitaire de l'axe Oz.

1.2.3. Écrire le bilan de quantité de mouvement pour le fluide compris entre les sections S_1 et S_2.

1.2.4. En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par l'air sur l'hélice en fonction de D_m, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$, puis en fonction de μ, S, v, v_1, v_2 et $\vec{e}_z$.

1.2.5. Montrer que la vitesse v de l'air au niveau de l'hélice est donnée par l'expression :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} \tag{1}$$

1.3. Étude de la puissance reçue par l'hélice : loi de BETZ

La production d'énergie se fait au préjudice de l'énergie cinétique du vent : lors de son passage à travers l'hélice, une fraction de l'énergie cinétique de l'air est transférée à l'hélice qui se met en rotation. La vitesse v_2 est donc nécessairement inférieure à v_1. On notera $\mathcal{P}$ la puissance reçue par l'hélice.

1.3.1. Écrire le bilan de l'énergie cinétique pour le fluide compris entre les sections S_1 et S_2.

1.3.2. En déduire l'expression de la puissance mécanique $\mathcal{P}$ cédée par l'air à l'hélice en fonction de μ, S, v, v_1 et v_2.

1.3.3. On pose : $x = \dfrac{v_2}{v_1}$. Montrer que la puissance $\mathcal{P}$ reçue par l'hélice s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu S v_1^3}{4}\,(1+x)\left(1-x^2\right) \tag{2}$$

1.3.4. Pour une vitesse v_1 donnée du vent en amont de l'éolienne, la vitesse en aval v_2 ne pouvant pas s'annuler ; il existe une puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$ que l'on peut extraire de la circulation d'air (Loi de BETZ).

1.3.4.1. Pour quelle valeur x_m de x la puissance $\mathcal{P}$ est-elle maximale. Donner l'expression de la puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$ (dite limite de BETZ) en fonction des grandeurs μ, S et v_1. Tracer l'allure de $\mathcal{P}(x)$.

1.3.4.2. Pour $x = x_m$, déterminer les expressions de v_2 et v en fonction de v_1, et l'expression de la force F exercée par l'air sur l'hélice en fonction de μ, S et v_1.

1.3.5. Le rendement de l'éolienne est défini comme le rapport de la puissance $\mathcal{P}$ fournie par l'air à l'hélice au débit de l'énergie cinétique en amont de l'éolienne.

1.3.5.1. Calculer le débit de l'énergie cinétique $\dot{E}_c$ à travers une section droite de surface S où la vitesse est v_1.

1.3.5.2. En déduire le rendement théorique de l'éolienne r_{th} en fonction de x.

1.3.6. **Application numérique :** $\mu = 1,3\ kg.m^{-3}$; $v_1 = 12\ m.s^{-1}$; $S = 3,14\ m^2$. Calculer $\mathcal{P}_{max}$ et le rendement associé r_{th}.

1.3.7. Dans la pratique, le rendement théorique maximal pour une éolienne idéale n'est jamais réalisé à cause des effets suivants :

- La force de trainée n'est jamais nulle à cause des frottements.
- L'hélice contient un nombre fini de pales.

Le rendement est alors plus faible et la puissance peut s'écrire :

$$\mathcal{P}_{reel} = \frac{1}{2}\,C_p\,\mu\,S\,v_1^3$$

où C_p est le coefficient de performance. Il dépend de la géométrie, de l'inclinaison des pales et de la vitesse du vent.

1.3.7.1. Montrer que C_p admet une valeur maximale à cause de la loi de BETZ.

1.3.7.2. Calculer numériquement C_p pour une puissance réelle $\mathcal{P}_{reel} = 900\ W$ en utilisant les données numériques de la question 1.3.6.

2ème partie
Modèle de l'élément de pale

Dans le modèle de l'écoulement axial traité dans la partie précédente, on a supposé que l'écoulement ne subit aucun mouvement de rotation, mais en réalité la loi de conservation du moment cinétique impose que l'air doit avoir un mouvement rotatif afin que l'hélice (rotor) puisse extraire un couple utile. Dans ce cas le sens de rotation de l'écoulement de l'air est opposé à celui du rotor.

Dans le modèle de l'élément de pale, on introduit le mouvement de rotation de l'air autour de l'axe Oz. Dans l'élaboration de ce modèle, les suppositions suivantes sont envisagées :

- L'écoulement en amont loin du plan du rotor, est complètement axial.
- Au niveau du plan du rotor, la vitesse angulaire de rotation de l'air est ω, cette vitesse diminue considérablement loin du rotor, en aval, de telle manière que la pression statique à cet endroit peut être considérée égale à la pression atmosphérique p_0.
- L'écoulement de l'air autour d'un élément de la pale est considéré comme bidimensionnel.

Les expressions de la puissance extraite et du couple appliqué sur les pales, peuvent être obtenues en considérant l'écoulement de l'air à travers un élément annulaire du tube de courant de rayon r, d'épaisseur dr et de section $dS = 2\pi r dr$ (figure 1). Les rayons du tube de courant correspondant sont notés r_1 au niveau de la section S_1 et r_2 au niveau de S_2.

On note Ω la vitesse angulaire de rotation de l'hélice autour de l'axe Oz et on suppose que la vitesse axiale v de l'air au niveau de l'hélice soit uniforme.

2.1. Étude de la rotation de l'air

2.1.1. La variation de la quantité de mouvement de l'air dans la direction tangentielle, donne la force tangentielle exercée par l'air sur la pale. Cette force s'écrit sous la forme :

$$dF_t = dm.v_t$$

dm est le débit massique à travers la surface dS et v_t la vitesse orthoradiale de l'écoulement de l'air.

2.1.1.1. Écrire l'expression v_t en fonction de ω et r. En déduire l'expression de dF_t en fonction de μ, v, ω, r et dS.

2.1.1.2. Écrire l'expression du moment dQ de la force dF_t par rapport à l'axe Oz.

2.1.1.3. Écrire l'expression de la puissance $d\mathcal{P}$ extraite à travers la section dS en fonction de dQ et Ω. En déduire son expression en fonction de μ, v, ω, Ω, r et dr.

2.1.1.4. Montrer que la puissance totale $\mathcal{P}$ extraite par l'hélice et le couple Q qu'elle subit sont donnés par les expressions suivantes :

$$Q = 2\pi\mu \int_0^R v\omega r^3 dr \tag{3}$$

$$\mathcal{P} = 2\pi\mu\Omega \int_0^R v\omega r^3 dr \tag{4}$$

Pour pouvoir calculer la puissance et le couple ($\mathcal{P}$ et Q), il faut déterminer ω.

2.1.2. On pose : $\omega = a'\Omega$; a' est appelé facteur d'interférence tangentiel. ω et a' dépendent à priori de r.

2.1.2.1. Écrire les expressions des débits de moment cinétique, par rapport à l'axe Oz, à travers les sections annulaires du tube de courant situées au niveau de S_1 et S_A de la figure 1, de rayons respectifs r_1 et r, et d'épaisseur dr. On notera ω_1 et ω_A les vitesses angulaires de rotation de l'air au niveau de ces sections annulaires.

2.1.2.2. Écrire le bilan de moment cinétique, en projection sur l'axe Oz, pour le fluide compris entre les sections annulaires situées au niveau de S_1 et S_A.

2.1.2.3. En déduire ω_A. Montrer, en utilisant les hypothèses du modèle que la vitesse angulaire de l'écoulement de l'air subit une discontinuité au niveau du plan du rotor.

2.1.2.4. On admet que la valeur de la vitesse angulaire de l'air au niveau du plan du rotor est la moyenne de celles situées juste avant et derrière le rotor (ω_A et ω_B respectivement) :

$$\omega = \frac{\omega_A + \omega_B}{2}$$

Montrer que $\omega_B = 2\Omega a'$.

2.1.2.5. Écrire le bilan du moment cinétique, en projection sur l'axe Oz, pour le fluide compris entre les sections annulaires situées au niveau de S_B et S_2.

2.1.2.6. Montrer que la vitesse angulaire ω_2 de l'air au niveau de la section S_2 est donnée par :

$$\omega_2 = 2\Omega a' \left(\frac{r}{r_2}\right)^2$$

Commenter.

2.2. Dimensionnement optimal des pales pour une puissance maximale

2.2.1. A l'aide de la relation de BERNOULLI suivant une ligne de courant entre les sections S_A et S_B, montrer que la différence de pression $p_A(r) - p_B(r)$ est donnée par :

$$p_A(r) - p_B(r) = \frac{1}{2}\mu\omega_B^2 r^2 \tag{5}$$

2.2.2. En déduire l'expression de la force élémentaire axiale dF exercée sur l'élément annulaire du rotor de surface dS.

2.2.3. On pose la vitesse axiale de l'écoulement de l'air au niveau des pales : $v = (1-a)v_1$. On admet que : $dF = \mu v(v_1 - v_2)dS$ et que la relation (1) est toujours vérifiée. Déterminer le facteur d'interférence tangentiel a' en fonction de a, v_1, r et Ω.

2.2.4. En utilisant la relation (4), déterminer la puissance extraite $\mathcal{P}$ en fonction de μ, Ω, R, v_1 et a.

2.2.5. Déterminer la valeur de a pour laquelle $\mathcal{P}$ est maximale. Donner les expressions correspondantes de la puissance maximale et des vitesses v et v_2. Commenter.

2.2.6. La puissance maximale est la même que celle donnée par la relation (2), à condition d'utiliser la valeur de x que l'on pourrait déduire de la question précédente. Déterminer l'expression de la vitesse de rotation Ω de l'hélice, en fonction de v_1 et R, qui correspond à l'extraction maximale de puissance.

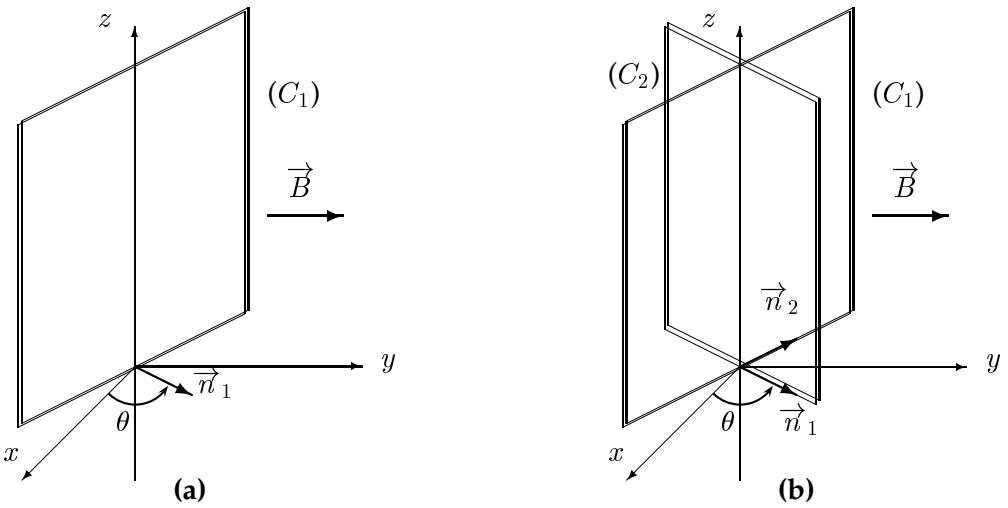

Figure 2: Schéma de principe d'un alternateur.

2.2.7. On utilise les données numériques de la question 1.3.6. Calculer la valeur de la vitesse de rotation Ω de l'hélice qui correspond à l'extraction maximale de puissance. Exprimer le résultat en nombre de tours par minute.

3ème partie

Conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique

La conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique est effectuée par une machine électrique appelée alternateur. Pour un alternateur classique tournant à $3000\ tr.min^{-1}$, le rotor de l'alternateur est accouplé par l'intermédiaire d'un multiplicateur de vitesse. Cependant, pour des éoliennes de puissance mécanique inférieure à $10\ kW$, le rotor est accouplé directement à l'arbre de l'hélice. C'est ce dernier cas qu'on supposera par la suite.

3.1. Principe de la conversion électromécanique

Une représentation simplifiée d'un alternateur, dit monophasé, est donnée sur la figure 2-a. Il comporte un cadre rectangulaire C_1 sur lequel on a enroulé N spires. Ce cadre tourne dans un champ magnétique uniforme et constant $\overrightarrow{B} = B\ \overrightarrow{e}_y$ autour de son axe de symétrie Δ que l'on prend comme axe Oz. On note $\overrightarrow{n}_1$ le vecteur normal, ce qui oriente le sens de parcours du cadre. On note θ l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{e}_x, \overrightarrow{n}_1)$. Le cadre est entraîné par l'axe de l'éolienne et tourne à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}$. On prendra : $\theta(t = 0) = 0$.

3.1.1. Établir l'expression du flux ϕ_1 du champ magnétique à travers une spire de C_1 en fonction de la surface du cadre S_c, B et θ.

3.1.2. Il apparaît aux extrémités de l'enroulement des N spires de C_1, une force électromotrice e_1 que l'on exprimera en fonction de S_c, N, B, θ et $\dot{\theta}$. Préciser en particulier sa pulsation ω_e en fonction de la vitesse de rotation Ω de la machine.

3.1.3. L'enroulement de résistance R_c et d'inductance propre L, est connecté à une charge résistive de résistance R. Représenter le circuit électrique équivalent ; on prendra soin de faire apparaître sur le circuit l'orientation de la f.é.m. et du courant i_1 qui le parcourt. Donner l'expression de i_1. On pourra poser $\underline{Z}_c = R_c + j\ L\omega_e$ l'impédance équivalente de l'enroulement, avec $j^2 = -1$.

3.1.4. On rappelle que le moment des forces de LAPLACE s'exerçant sur le circuit C_1 baignant dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme vaut : $\overrightarrow{\Gamma}_1 = \overrightarrow{M}_1 \times \overrightarrow{B}$ où $\overrightarrow{M}_1 = N\ i_1\ S_c\ \overrightarrow{n}_1$ est le moment magnétique du cadre C_1.

On notera J le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ du cadre C_1 et de l'axe de l'hélice dont il est solidaire. On supposera que les liaisons avec l'axe sont parfaites.

3.1.4.1. Déterminer l'expression en fonction du temps du moment $\overrightarrow{\Gamma}_1$ des forces de LAPLACE que subit le cadre C_1.

3.1.4.2. Par application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ, trouver une équation différentielle en θ reliant $\overrightarrow{\Gamma}_1$ et le moment $\overrightarrow{\Gamma}_M = \Gamma_M\ \overrightarrow{e}_z$ des actions exercées par l'hélice sur la partie tournante.

3.1.5. En régime permanent, la vitesse angulaire Ω est constante. Déterminer l'expression de $\langle \Gamma_M \rangle$, la valeur moyenne dans le temps de Γ_M. En déduire la puissance mécanique moyenne $\mathcal{P}_m$ fournie par l'hélice à la génératrice en fonction des données du problème.

3.1.6. Déterminer en régime permanent la puissance moyenne électrique $\mathcal{P}_e$ mise en jeu dans le générateur de f.e.m. e_1. Comparer $\mathcal{P}_e$ à $\mathcal{P}_m$. Commenter.

3.2. Adaptation d'impédance

Un second cadre identique C_2, solidaire du premier et s'en déduisant par une rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$, complète le dispositif (figure 2-b). On notera $\overrightarrow{n}_2$ le vecteur normal à ce second cadre. L'ensemble forme ce qu'on appelle un alternateur diphasé. On néglige l'inductance mutuelle entre les deux enroulements.

3.2.1. Exprimer la f.é.m. e_2 qui apparaît aux bornes de C_2.

3.2.2. Les deux cadres C_1 et C_2 sont connectés à une même charge d'utilisation d'impédance $\underline{Z}_u = R_u + j\ X$.

3.2.2.1. Représenter le circuit électrique équivalent.

3.2.2.2. Le circuit précédent peut être représenté par le schéma équivalent de la figure 3. Établir les expressions de e en fonction de e_1 et e_2, et de $\underline{Z}_e$ en fonction de $\underline{Z}_c$.

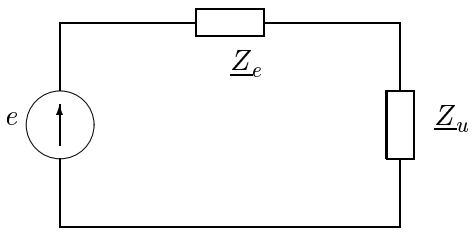

Figure 3: Schéma équivalent de l'alternateur associé à une charge.

3.2.3. Déterminer l'expression de la puissance moyenne $\mathcal{P}_c$ délivrée à la charge.

3.2.4. Pour quelle charge la puissance $\mathcal{P}_c$ est-elle maximale ? Commenter.

FIN DE L'ÉPREUVE