- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les* $\boxed{\textit{références}}$ *des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties du problème sont relativement indépendantes entre elles.*
- *Tous les résultats numériques seront donnés avec un nombre de chiffres significatifs compatibles avec les données fournies.*

Le sujet de cette épreuve est constitué de deux parties indépendantes : la première partie est notée sur ***4 points***, la deuxième sur ***16 points***.

Partie 1 : Turbine à gaz

De la vapeur d'eau évolue dans une turbine horizontale, de section constante Σ, munie d'une hélice. À l'extérieur, la température est constante et vaut $T_0 = 35\ °C$. La vapeur est admise dans la turbine à la température $T_1 = 400\ °C$ et la pression $P_1 = 6{,}0\ bar$, et ressort à la température $T_2 = 100\ °C$ sous pression $P_2 = 1{,}0\ bar$. Le débit massique au travers de la turbine vaut $D_m = 1\ kg.s^{-1}$. On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait et on note c_P sa chaleur massique.

Données :

- Masse molaire de l'eau : $M_e = 18 g.mol^{-1}$.
- Coefficient isentropique : $\gamma = \dfrac{c_P}{c_V} = 1{,}3$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\ J.mol^{-1}.K^{-1}$.
- Expression de l'entropie molaire d'un gaz parfait en fonction de la température T et de la pression P :

$$S_m(T,P) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{T}{T_1}\right) - R\ln\left(\frac{P}{P_1}\right) + S_m(T_1,P_1)$$

- Expression des deux principes de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire :
  - $D_m\left[\left(h_s + e_{c,s} + e_{p,s}\right) - \left(h_e + e_{c,e} + e_{p,e}\right)\right] = P_u + P_{th}$;
  - $D_m\left(s_s - s_e\right) = \dfrac{P_{th}}{T_0} + s_{créée}$.

avec h l'enthalpie massique, e_c l'énergie cinétique massique et e_p l'énergie potentielle massique du fluide ; P_u la puissance mécanique utile qu'il reçoit et P_{th} la puissance thermique reçue, $s_{créée}$ l'entropie créée par unité de temps et où l'on a noté e les grandeurs en entrée et s celles en sortie.

On néglige les variations d'énergie cinétique.

1. Sachant que le but d'une turbine est de récupérer une puissance mécanique, les pertes thermiques sont donc a priori faibles. Exprimer, en fonction de D_m, c_P, T_1 et T_2, la puissance maximale cédée à la turbine dans l'hypothèse d'un écoulement adiabatique.

2. Calculer la variation d'entropie du fluide entre l'entrée et la sortie de la turbine. Justifier que le résultat obtenu est contradictoire avec l'hypothèse d'un écoulement adiabatique.

On suppose que la transformation est réversible dans la turbine.

3. Déduire du second principe de la thermodynamique la puissance P_{th} cédée par la vapeur d'eau à l'extérieur.

4. En déduire la puissance P_u cédée à la turbine.

Partie 2 : Mesure de la vitesse d'un écoulement

L'objectif de cette partie est d'étudier deux méthodes qui permettent de mesurer la vitesse d'un écoulement et donc son débit volumique.

Données :

- Divergence en coordonnées cylindriques : $div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.
- $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

1. Profil de vitesse dans une conduite cylindrique

On étudie l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique horizontale de rayon a, de longueur L et d'axe (Oz) orienté par le vecteur unitaire $\vec{e_z}$, (figure 1). On repère un point de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z) auxquelles on assoie la base cylindrique $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$.

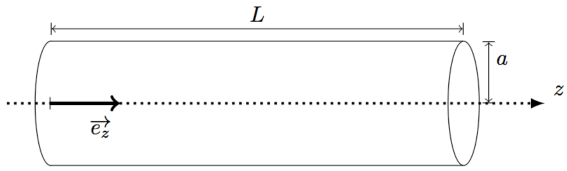

Figure 1 : Conduite cylindrique

L'écoulement du fluide, de vitesse $\vec{v}$, est décrit en première approximation comme l'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible et homogène. On note η la viscosité dynamique du fluide, ρ sa masse volumique et D_V le débit volumique. On suppose que l'écoulement du fluide est laminaire en régime permanent et on néglige les effets de la pesanteur.

1.1. Quelle conséquence l'hypothèse de fluide en écoulement incompressible a-t-elle sur la masse volumique du fluide ?

1.2. L'équation locale de conservation de la masse dans le cas d'un fluide quelconque est $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\vec{v}) = 0$. Que peut-on en déduire concernant le champ de vitesse pour le fluide incompressible ? Que peut-on dire aussi du débit volumique D_V ?

On rappelle l'expression du nombre de Reynolds pour une conduite cylindrique de rayon a :

$$\mathrm{R_e} = \frac{2\rho v_m a}{\eta}$$

où v_m est la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section droite.

1.3. Exprimer l'unité de η en fonction du mètre, du kilogramme et de la seconde.

1.4. Expliquer ce que signifient écoulement laminaire et écoulement turbulent.

On suppose que les champs des vitesses et pressions présentent une invariance par rotation autour de l'axe de la conduite : $\vec{v} = v(r,z)\overrightarrow{e_z}$ et $P = P(r,z)$.

1.5. Justifier que l'on peut chercher un profil de vitesse sous la forme $\vec{v} = v(r)\overrightarrow{e_z}$.

1.6. Justifier qu'une particule fluide est animée d'un mouvement rectiligne uniforme.

1.7. Exprimer la résultante des forces pressantes $\overrightarrow{dF_p}$ qui s'exercent sur la particule fluide.

1.8. Exprimer la résultante des forces de viscosité $\overrightarrow{dF_\eta} = dF_\eta \overrightarrow{e_z}$ qui s'exercent sur la particule fluide en fonction de η, r, $\frac{dv}{dr}$ et dz.

1.9. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que $\frac{dP}{dz} = \frac{2\eta}{r}\frac{dv(r)}{dr}$.

1.10. En déduire que la pression ne dépend pas de r et que c'est une fonction affine et décroissante. Exprimer la pression $P(z)$ en fonction des deux valeurs aux extrémités du tuyau, $\Delta P = P(z=0) - P(z=L)$.

1.11. Justifier la condition aux limites que doit respecter le champ des vitesses, $v(r=a) = 0$.

1.12. Montrer que le profil de vitesse dans le tronçon cylindrique de l'artère a ainsi pour expression :

$$\vec{v} = v_0\left(1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right)\overrightarrow{e_z}$$

Donner l'expression de v_0.

1.13. Représenter graphiquement le profil du champ des vitesses. Commenter.

1.14. Montrer que le débit volumique du fluide est donné par l'expression :

$$D_V = \varepsilon \frac{a^4}{L\eta} \Delta P$$

ε étant un coefficient numérique dont on donnera la valeur.

1.15. En déduire la vitesse moyenne v_m du fluide.

1.16. Application numérique : Le fluide est du sang dans une grosse artère avec $\rho = 1{,}05.10^3 kg.m^{-3}$, $\eta = 3.10^{-3}$ Pl , $a = 4.10^{-3}\ m$, $L = 1{,}2.10^{-1}\ m$ et $\Delta P = 7{,}5 Pa$. Calculer v_m et R_e. Comparer à la valeur critique de R_e de l'ordre de 1000 et conclure quant à la nature de l'écoulement, laminaire ou turbulent.

2. Vélocimétrie laser

La vélocimétrie laser est une technique optique qui consiste à croiser deux faisceaux laser cohérents, faisant entre eux un angle de 2α ($\alpha << 1$) afin de mesurer la vitesse locale d'un fluide qui s'écoule selon l'axe Oz dans un tuyau transparent (figure 2). L'écoulement du fluide est ensemencé par des particules fines solides réfléchissantes (appelées traceurs). En passant alternativement dans les franges brillantes et sombres qui résultent des interférences des deux faisceaux (1) et (2), les traceurs réfléchissent la lumière. Ils diffusent une intensité lumineuse proportionnelle à l'éclairement de leur surface. La lumière diffusée présente un clignotement régulier et est détectée par un photodétecteur qui la convertit en signal électrique.

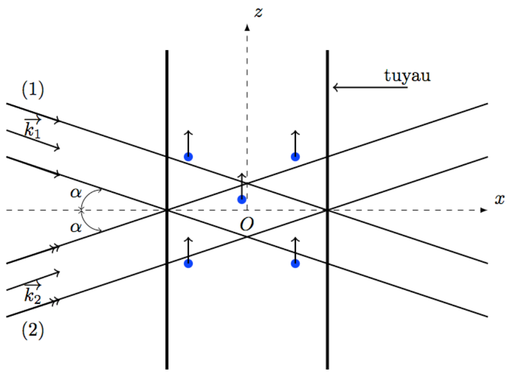

Figure 2 : Principe de la vélocimétrie laser.

Les traceurs sont emportés par l'écoulement stationnaire et on pourra assimiler leur vitesse à celle du fluide.

On ne considère pour l'instant qu'une seule particule.

Les deux faisceaux laser cylindriques, de même intensité, de même état de polarisation et de même diamètre, sont issus d'un laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 514{,}5 nm$. Leurs directions forment un angle $2\alpha = 20°$. Le plan médiateur des deux faisceaux est réglé pour être exactement perpendiculaire à la direction de l'écoulement. Les amplitudes instantanées au point M des ondes correspondant aux deux faisceaux, supposées planes et de vecteurs d'onde $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ ($\|\vec{k_1}\| = \|\vec{k_2}\| = k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$), s'écrivent respectivement sous la forme :

$$s_1(M,t) = S_0 \cos(\varphi_1(M,t)) \text{ et } s_2(M,t) = S_0 \cos(\varphi_2(M,t))$$

avec $\varphi_1(M,t) = \omega t - \overrightarrow{k_1}.\overrightarrow{OM} + \varphi_0$ et $\varphi_2(M,t) = \omega t - \overrightarrow{k_2}.\overrightarrow{OM} + \varphi_0$, φ_0 étant une constante.

Dans un premier temps, on assimile l'indice optique du fluide à celui de l'air, $n_a = 1$.

2.1. À quelle couleur correspond la longueur d'onde $\lambda_0 = 514{,}5 nm$?

2.2. Exprimer les vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ en fonction de k_0 et α. Dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ associée repère (O,x,z).

2.3. Exprimer l'amplitude de l'onde résultante $s(M,t)$ au point M de la zone de croisement (champ d'interférence) des deux faisceaux en fonction des coordonnées x et z de M , et des autres données.

2.4. L'onde résultante est-elle plane ? Est-elle progressive ? Est-elle stationnaire ? Est-elle monochromatique ?

On définit l'intensité lumineuse $I(M)$ au point M par $I(M) = < s^2(M,t) >$, moyenne temporelle de $s^2(M,t)$, et on note $I_{\max}$ l'intensité maximale en M .

2.5. Justifier que l'on observe des interférences dans la zone de croisement des deux faisceaux laser.

2.6. Exprimer le déphasage $\varphi = \varphi_1(M,t) - \varphi_2(M,t)$ entre les deux ondes en un point M du champ d'interférence. Montrer que $I(M)$ se met sous la forme $I(M) = I_{\max} \cos^2\left(2\pi \frac{z}{\Lambda_0}\right)$. Donner l'expression de Λ_0.

2.7. Décrire l'aspect des franges d'interférences. Exprimer l'interfrange i_0 en fonction de λ_0 et α.

2.8. Tracer l'allure de $I(M)$ en tenant compte de la largeur des faisceaux incidents.

La figure 3 donne le signal électrique détecté par un photodétecteur.

2.9. Que vaut la période T du clignotement ?

2.10. Exprimer la vitesse V d'écoulement du fluide en supposant que le traceur suit parfaitement l'écoulement. Calculer sa valeur numérique.

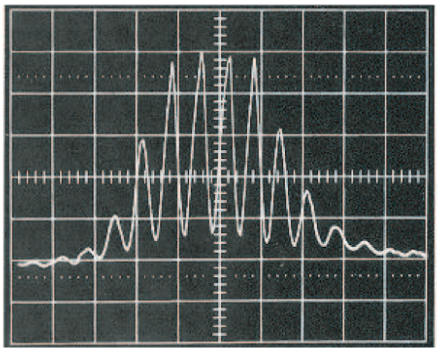

Figure 3 : Tension en sortie du photodétecteur ($1V/div$ et $1\mu s/div$).

On souhaite connaître l'influence de l'indice du fluide dans le résultat établi. On considère alors le cas réel où l'indice optique du fluide est $n_f \neq n_a = 1$. Chaque rayon lumineux d'un des deux faisceaux incidents, arrive avec un angle d'incidence α par rapport à l'axe (Ox) qui est la normale au dioptre air-fluide. On note α' l'angle de réfraction.

2.11. Écrire la relation entre α et α'.

2.12. Exprimer la longueur d'onde λ du laser dans le fluide.

2.13. Quelle est la nouvelle expression de l'interfrange i de la figure d'interférences ? Y a-t-il besoin de connaître l'indice optique du fluide pour pouvoir interpréter l'expérience et déterminer la vitesse d'écoulement ?

Afin de déterminer le sens de l'écoulement du fluide, on place sur le trajet du faisceau laser (1) un dispositif optoélectronique composé d'une lame transparente d'épaisseur e. L'indice de réfraction n_l de cette lame varie en fonction de la tension $u(t)$ qu'on lui applique : $n_l(t) = 1 + a\,u(t)$, avec a une constante positive. On suppose que l'incidence du faisceau laser est normale sur la face d'entrée de la lame. On assimile de nouveau l'indice optique du fluide à celui de l'air.

2.14. Exprimer le nouveau déphasage $\varphi'(M)$ entre les deux ondes qui interfèrent au point M du champ d'interférence en fonction de $u(t)$, a, e, λ_0, α et z.

2.15. En déduire la position des franges brillantes.

2.16. On souhaite obtenir des franges d'interférences qui se déplacent à une vitesse constante V_0 dans la direction de l'axe Oz. Quelle est l'expression de la tension $u(t)$ dans ce cas ? Expliquer comment connaître le sens de déplacement.

2.17. On suppose que la particule se déplace dans le sens des z positifs. Comment varie la période du signal délivré par le photodétecteur dans ce cas ?