Correction de l'épreuve de physique I filière TSI

Concours CNC session 2024

EL FILALI SAID
CPGE/BENI-MELLAL

Partie 1

ÉTUDE D'UN PENDULE SIMPLE

1.1- ▶ Bilan des forces appliquées :

- $\overrightarrow{P}$: le poids de l'objet.
- $\overrightarrow{T}$: tension du fil.

▶ La projection des forces :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = mg(\cos\theta\ \overrightarrow{u_r} - \sin\theta\ \overrightarrow{u_\theta})}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{T} = -T\ \overrightarrow{u_r}}$$

Avec $T = \|\overrightarrow{T}\|$: le module de la tension du fil.

1.2- L'expression de :

▶ Vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_T) = L\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

▶ Accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R_T) = -L\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + L\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

1.3- L'équation différentielle du mouvement :

La projection de la RFD dans R_T supposé galiléen, suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ donne :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

C'est l'équation pendulaire : équation différentielle non linéaire.

1.4- Pour les petits mouvements : $\sin\theta \simeq \theta$; l'équation différentielle devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

C'est une équation différentielle linéaire, en posant :

$$\boxed{\omega_o^2 = \frac{g}{L} \Longrightarrow \omega_o = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

La solution est : $\theta(t) = A\cos(\omega_o t) + B\sin(\omega_o t)$
Les conditions initiales :
- $\theta(t=0) = \theta_o \Longrightarrow A = \theta_o$
- $\dot{\theta}(t=0) = 0 \Longrightarrow B = 0$

Il en résulte que :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o \cos(\omega_o t)}$$

- La période :

$$\boxed{\omega_o = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Partie 2

Gravitation et pesanteur de la terre sphérique

2.1 Champ gravitationnel de la terre

2.1.1 L'expression de la force gravitationnelle :

$$\boxed{\overrightarrow{F_g} = -\frac{GM_T m}{R^3}\overrightarrow{OM}}$$

2.1.2 L'expression du champ gravitationnel :

$$\boxed{\overrightarrow{g_o} = -\frac{GM_T}{R^3}\overrightarrow{OM}}$$

2.2 Lois de composition des vitesses et des accélérations

2.2.1 Le référentiel terrestre R_T n'est pas galiléen puisqu'il en rotation par rapport à R_G.

2.2.2 L'expression de la vitesse absolue :

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

$$\overrightarrow{V}(M/R_G) = \overrightarrow{V}(O'/R_G) + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/R_T} + \overrightarrow{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_G) = \overrightarrow{V}(M/R_T) + \overrightarrow{V}(O'/R_G) + \overrightarrow{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

- Vitesse d'entraînement de M :

$$\boxed{\overrightarrow{V}_e(M) = \overrightarrow{V}(O'/R) + \overrightarrow{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

- Vitesse relative du point M :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_T) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/R_T} = \overrightarrow{V}_r}$$

2.2.3 L'expression de l'accélération absolue de M :

- $\vec{V}(M/R_G) = \vec{V}(O'/R_G) + \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/R_T} + \vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}$
- $\vec{a}(M/R_G) = \dfrac{d\vec{V}(M/R_G)}{dt}_{/R_G}$
- $\dfrac{d\vec{V}(O'/R_G)}{dt}_{/R_G} = \vec{a}(O'/R_G)$
- $\dfrac{d}{dt}_{/R_G}\left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/R_T}\right) = \dfrac{d}{dt}_{/R_T}\left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/R_T}\right) + \vec{\omega}_T \wedge \left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/R_T}\right) = \vec{a}(M/R_T) + \vec{\omega}_T \wedge \vec{V}_r$
- $\dfrac{d}{dt}_{/R_G}\left(\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \left(\dfrac{d\vec{\omega}_T}{dt}_{/R_G}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_T \wedge \dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/R_G}$

$\Longrightarrow \dfrac{d}{dt}_{/R_G}\left(\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \left(\dfrac{d\vec{\omega}_T}{dt}_{/R_G}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_T \wedge [\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/R_T} + \vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}]$

$\Longrightarrow \dfrac{d}{dt}_{/R_G}\left(\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M}\right) = \left(\dfrac{d\vec{\omega}_T}{dt}_{/R_G}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_T \wedge \vec{V}_r + \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M})$

D'où :

$$\boxed{\vec{a}(M/R_G) = \vec{a}(O'/R_G) + \vec{a}(M/R_T) + 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{V}_r + \left(\dfrac{d\vec{\omega}_T}{dt}_{/R_G}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

On pose :

▹ **Accélération relative :**

$$\boxed{\vec{a}_r(M) = \vec{a}(M/R_T) = \dfrac{d}{dt}_{/R_T}\left(\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}_{/R_T}\right)}$$

▹ **Accélération d'entraînement :**

$$\boxed{\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O'/R_G) + \left(\dfrac{d\vec{\omega}_T}{dt}_{/R_G}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

▹ **Accélération de *Coriolis* :**

$$\boxed{\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}_T \wedge \vec{V}_r}$$

2.2.4 La relation fondamentale de la dynamique dans R_G galiléen, donne :

$$\vec{F}_g = m\vec{a}(M/R_G)$$

Or : $\vec{a}(M/R_G) = \vec{a}(M/R_T) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$

Donc : $\vec{F}_g - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M) = m\vec{a}(M/R_T)$

On pose :

$$\boxed{\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)}$$

force d'inertie d'entrainement

$$\boxed{\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M)}$$

Force d'inertie de Coriollis

D'où dans un référentiel non galiléen, la R.F.D s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_g + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = m\vec{a}(M/R_T)}$$

2.3 Définitions du poids d'un corps

2.3.1 La condition d'équilibre dans R_T non galiléen :

$$\boxed{\vec{F}_g + \vec{F} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ie} = \vec{0}}$$

2.3.2 L'expression du champ de pesanteur $\vec{g}(M)$:

On a Dans R_T :

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F} = -\vec{P}$$

Avec :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}(M)}$$

$\vec{g}(M)$: Champ de pesanteur.
La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel R_T non galiléen donne :
$m\dfrac{d\vec{V}}{dt}_{/R_T} = \vec{F}_g + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}$
Or : $\vec{V}(M/R_T) = \vec{0} \Longrightarrow \vec{F}_{ic} = \vec{0}$ (équilibre relatif)
De même : $\vec{F}_g = m\vec{g}_o(M)$
(On néglige l'effet des autres astres autre que la terre).
Et $\vec{F}_{ie} = -m\vec{\omega}_T \wedge (\vec{\omega}_T \wedge \overrightarrow{OM}) = m\omega^2\overrightarrow{HM}$
avec ω_T la pulsation propre du référentiel terrestre dans le référentiel géocentrique.
On conclut que : $\vec{F} + m\omega_T^2\overrightarrow{HM} + m\vec{g}_o(M) = \vec{0}$.
L'équilibre donne : $\vec{F} = -\vec{P} = -m(\vec{g}_o(M) + \omega_T^2\overrightarrow{HM})$.
On tire que :

$$\boxed{\vec{g}(M) = -\frac{GM_T}{R^3}\overrightarrow{OM} + \omega_T^2\overrightarrow{HM}}$$

Avec : $R = ||\overrightarrow{OM}||$

2.3.3 La valeur numérique :

- Au pôle nord (point N), on a $HM = 0$:

$$\boxed{||\vec{g}(N)|| = \frac{GM_T}{R_T^2}}$$

- A l'équateur (point E), on a $HM = R_T$:

$$\boxed{||\vec{g}(E)|| = \frac{GM_T}{R_T^2} - \omega_T^2 R_T}$$

L'écart :

$$\boxed{\Delta g = \omega_T^2 R_T \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta g = 34,1\times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$$

L'écart trouvé est du au modèle sphérique adopté de la terre (elle est ellipsoide).

Partie 3

Aplatissement de la terre

3.1 Fluide en équilibre dans le champ de pesanteur

3.1.1 L'inventaire des forces :

- $d\overrightarrow{P} = dm\overrightarrow{g}$ le poids ;
- $d\overrightarrow{F}(z+dz) = -P(z+dz)dS\,\overrightarrow{u_z}$: la force pressente sur la surface d'équation $z+dz$;
- $d\overrightarrow{F}(z) = P(z)dS\,\overrightarrow{u_z}$: la force pressente sur la surface d'équation z ;
- $d\overrightarrow{F}_L$: la force pressante sur la face latérale.

▶ La résultante horizontale des forces pressantes sur la face latérale est nulle : s'annulle 2 à 2.

3.1.2 La résultante verticale des forces pressantes est :

$$d\overrightarrow{F}(z+dz) + d\overrightarrow{F}(z) = (P(z) - P(z+dz))dS\,\overrightarrow{u_z} \Longrightarrow d\overrightarrow{F}(z+dz) + d\overrightarrow{F}(z) = -\frac{dP}{dz}S\,dz\,\overrightarrow{u_z}$$

Comme :$S\,dz = d\tau$, alors :

$$\boxed{d\overrightarrow{F}(z+dz) + d\overrightarrow{F}(z) = -\frac{dP}{dz}d\tau\,\overrightarrow{u_z}}$$

3.1.3 Puisque La résultante horizontale des forces pressantes sur la face latérale est nulle, alors la pression $P(M)$ ne dépend ni de x ni de y ; donc :

$$\overrightarrow{grad}\,P = \frac{dP}{dz}\,\overrightarrow{u_z}$$

Il en résulte que l'équilibre donne :

$$d\overrightarrow{F}(z) + d\overrightarrow{F}(z+dz) + d\overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$$

La projection suivant l'axe Oz donne :

$$\boxed{\overrightarrow{grad}\,P = \rho\overrightarrow{g} \qquad (E)}$$

3.1.4 **Application**

3.1.4.1▹ L'eau de mer est incompressible ($\rho_{mer} = cte$) et g uniforme ; donc , par intégration de l'équation (E) projetée sur l'axe Oz, on obtient :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho_{mer}g \Longrightarrow P(z) = -\rho_{mer}gz + cte$$

Pour $z = 0$, on a $P = P_o$; donc :

$$\boxed{P(z) = P_o - -\rho_{mer} g z}$$

▶ Pour $z = -H$, on a :

$$\boxed{P_H = P_o + \rho_{mer} g H \xrightarrow{\text{A.N}} P_H = 101 \times 10^5 \text{ Pa}}$$

3.1.4.2▷ La pression à la profondeur doit diminuer puisque g diminu.
N.B : Comme $H \ll R_T \Longrightarrow \Delta g$ est très faible et de même pour ΔP.

3.2 Modèle de l'aplatissement de la terre

3.2.1 On a :

$$\varepsilon = \frac{\omega_T^2 R^3}{GM_T} \Longrightarrow \varepsilon = \frac{\omega_T^2 R dm}{\frac{GM_T}{R^2} dm}$$

Comme :
▶ $dF_{ie} = \omega_T^2 R dm$: la force d'inertie élémentaire crée sur une masse élémentaire dm située à l'équateur.
▶ $dF_g = \frac{GM_T}{R^2} dm$: la force gravitationnelle élémentaire crée sur une masse élémentaire dm située à l'équateur distant de R.
Il en résulte que :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\|d\overrightarrow{F}_{ie}(E)\|}{\|d\overrightarrow{F}_g(E)\|}}$$

Application numérique:

$$\boxed{\varepsilon = 3,5 \times 10^{-3}}$$

3.2.2 Les équations différentielles vérifiée par la pression P :
Sachant que :
- $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$
- $\overrightarrow{HM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$

Comme :

$$\overrightarrow{grad}\, P = -\frac{4}{3}\pi G \rho_T^2 \overrightarrow{OM} + \rho_T \omega_T^2 \overrightarrow{HM}$$

▶ La projection suivant Ox, donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_T^2 x + \rho_T \omega_T^2 x \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = -(\frac{4}{3}\pi G \rho_T^2 - \rho_T \omega_T^2) x$$

▶ La projection suivant Oy, donne :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{4}{3}\pi G \rho_T^2 y + \rho_T \omega_T^2 y \Longrightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -(\frac{4}{3}\pi G \rho_T^2 - \rho_T \omega_T^2) y$$

Il en résulte que :

$$\boxed{K_1 = \frac{4}{3}\pi G \rho_T^2 - \rho_T \omega_T^2}$$

▶ La projection suivant Oy, donne :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{4}{3}\pi G\rho_T^2 z$$

Il en résulte que :

$$\boxed{K_2 = \frac{4}{3}\pi G\rho_T^2}$$

3.2.3 Résolution :

La pression P est une fonction scalaire à trois variables ; et puisque les dérivées partielles sont à variables séparées, donc l'intégration donne :

$$\boxed{P(x,y,z) = -\frac{1}{2}K(x^2+y^2) - \frac{1}{2}K_2 z^2 + C}$$

3.2.4 À la surface libre, on a : $P = P_o$, ce qui donne :

$$\boxed{\frac{x^2}{\frac{2(C-P_o)}{K_1}} + \frac{y^2}{\frac{2(C-P_o)}{K_1}} + \frac{z^2}{\frac{2(C-P_o)}{K_2}} = 1}$$

Par conséquent :

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{2(C-P_o)}{K_1}} \qquad et \qquad b = \sqrt{\frac{2(C-P_o)}{K_2}}}$$

Ainsi :

$$\boxed{f = 1 - \frac{b}{a} \Longrightarrow f = 1 - \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}}$$

Sachant que :

$$\boxed{\frac{K_1}{K_2} = 1 - \frac{\rho_T\omega_T^2}{\frac{4}{3}\pi G\rho_T^2}}$$

En remplaçant ρ_T par son expression ; on obtient :

$$\frac{K_1}{K_2} = 1 - \varepsilon$$

Il en résulte que :

$$\boxed{f = 1 - \sqrt{1-\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \ll 1} f \simeq \frac{\varepsilon}{2}}$$

Application numérique:

$$\boxed{f \simeq 1,75 \times 10^{-3}}$$

Commentaire : Valeur très faible, c'est à dire que l'ellipsoide tend vers une sphère.

Partie 4

Gravimètre optique à chute libre

4.1 Source fixe

4.1.1 La différence de marche :

$$\boxed{\delta = \frac{ad}{D} + \frac{az}{f'}}$$

4.1.2 L'intensité lumineuse :

$$\boxed{I(M) = I_o\Big(1 + \cos\Big(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(M)\Big)\Big) \Longrightarrow I(M) = I_o\Big(1 + \cos\Big(\frac{2\pi a}{\lambda}\Big[\frac{d}{D} + \frac{z}{f'}\Big]\Big)\Big)}$$

4.2 Source en mouvement. Mesure de g

4.2.1 L'équation du mouvement :

R.F.D projeté suivant l'axe Oz donne :

$$\boxed{z_s(t) = d - \frac{1}{2}gt^2}$$

4.2.2 La position z_o du détecteur qui correspond à $\delta = 0$:

$$\boxed{\delta = a\Big(\frac{d}{D} + \frac{z}{f'}\Big) = 0 \Longrightarrow z_o = -\frac{f'd}{D}}$$

4.2.3 L'expression de la différence de marche $\delta(t)$:

En remplaçant z_s et z_o par leurs expressions , on obtient :

$$\boxed{\delta(t) = -\frac{1}{2}\frac{ag}{D}t^2}$$

4.2.4 La valeur numérique de g :

Comme pour $t_m = 15\ ms$ on a 4 minimums d'intensité :$|\delta| = (\frac{1}{2}\lambda + 3\lambda) = 3,5\ \lambda$; alors :

$$\boxed{g = \frac{7\lambda D}{at_m^2} \xrightarrow{\text{A.N}} g = 9,85\ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$