- *On veillera à une présentation et une rédaction, claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties de l'épreuve sont relativement indépendantes entre elles.*

La comète C/1995 O1 Hale-Bopp

Les divers peuples du monde connaissent les comètes depuis bien longtemps. Les comètes apparaissent dans le ciel, leur brillance augmentant progressivement en quelques mois en révélant une majestueuse structure formée d'une tête brillante, appelée chevelure ou coma, suivie d'une longue traîne lumineuse (figure 1). Les comètes s'affaiblissent ensuite progressivement et disparaissent en plusieurs mois.

Figure 1 : Comète de Hale-Bopp : *Observer : Wally Pacholka (http://www.jpl.nasa.gov/comet)*

Le mouvement des comètes, comme celui des planètes, se réfère à leur position par rapport au *« fond céleste »* que constituent les constellations d'étoiles, dont la forme et la disposition relative semble immuable. Sur ce fond les comètes se déplacent bien plus vite que les planètes.

Données :

- Masse du Soleil : $M_S = 2.10^{30} kg$.
- Rayon de l'orbite terrestre supposée circulaire : $d_{ST} = 1,5.10^8 km$.
- Masse volumique de l'eau : $\mu_e = 10^3 kg.m^{-3}$.
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11} SI$.
- Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,00.10^8 m.s^{-1}$.
- Équations de Maxwell dans le vide sans charge ni courant :

$$div\vec{E} = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Densité volumique d'énergie électromagnétique : $u_{em} = \dfrac{\varepsilon_0 \vec{E}^2}{2} + \dfrac{\vec{B}^2}{2\mu_0}$.

L'épreuve est composée de deux parties indépendantes, à l'intérieur desquelles de nombreuses questions peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

La partie 1 est notée sur ***4 points***, la partie 2 sur ***16 points***.

Partie 1
Onde électromagnétique dans le vide

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique sinusoïdale dans le vide. On suppose que le champ électrique de cette onde en un point M de l'espace à l'instant t est de la forme : $\vec{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$. On pose $k = \dfrac{\omega}{c}$ avec ω et k sont respectivement la pulsation et le module d'onde de l'onde, et c est la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Déterminer la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde.

2. Exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ de cette onde puis la moyenne temporelle $<\vec{\Pi}>$ du vecteur de Poynting $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ de l'onde, μ_0 étant la perméabilité magnétique du vide.

3. Exprimer la moyenne temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique $< u_{em} >$ de cette onde.

4. Quelle relation y a-t-il entre $<\vec{\Pi}>$ et $< u_{em} >$?

Partie 2
La comète Hale-Bopp

1. Trajectoire de la comète Hale-Bopp

En 1997, la comète *Hale-Bopp*, découverte indépendamment par Alan Hale et Thomas Bopp en 1995, est passée relativement près de la Terre. Cette comète, supposée centrée au point C , possède une orbite elliptique autour du Soleil centré au point S avec une excentricité $e_C = 0{,}995$. À son périhélie (point de l'orbite le plus rapproché du Soleil), le 1er avril 1997, sa distance au Soleil était $r_C^P = 1{,}35.10^8 km$ et en ce point sa vitesse par rapport au référentiel de Copernic valait $v_C^P = 45 km.s^{-1}$. On note M_S et m_C les masses respectivement du Soleil et de la comète assimilés à des points matériels, et G la constante de gravitation. On néglige la masse de la comète devant celle du Soleil. L'étude est faite dans le référentiel de Copernic centré sur le Soleil et supposé galiléen.

On note (Sxy) le plan de la trajectoire de la comète et on repère la position de la comète par ses coordonnées polaires (r_C, θ_C) auxquelles on associe la base $\left(\vec{e_{r_C}}, \vec{e_{\theta_C}}\right)$, $\vec{e_{z_C}}$ étant le vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan.

On donne l'équation polaire de la trajectoire elliptique de la comète $r_C = \dfrac{p_C}{1 + e_C \cos(\theta_C)}$ où p_C est le paramètre de l'orbite. On rappelle l'accélération d'un corps céleste assimilé à un point matériel écrite en coordonnées polaires : $\vec{a} = -\left(\frac{C_a}{r}\right)^2 \left(\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right)\vec{e_r}$, C_a étant la constante des aires.

1.1. Quelle serait la trajectoire (hypothétique) de la comète si on avait $e_C = 1$?

1.2. Faire un schéma de la trajectoire de la comète. Faire apparaître la position du Soleil S, celle du périhélie P et celle de l'aphélie A (point de l'orbite le plus éloigné du Soleil). En un point C quelconque de la trajectoire, faire apparaître la base locale cylindrique.

1.3. Rappeler l'expression de la force de gravitation $\vec{F}_{S\to C}$ exercée par le Soleil sur la comète. Justifier que cette force est centrale.

1.4. Expliquer comment la conservation du moment cinétique permet d'expliquer que la trajectoire de la comète est plane.

1.5. Calculer le paramètre p_C de l'orbite de la comète et la distance $SC = r_C^A$ de la comète à l'aphélie.

1.6. Écrire la conservation du moment cinétique au périhélie et à l'aphélie. En déduire l'expression de la vitesse v_C^A de la comète à l'aphélie. Calculer la valeur numérique de v_C^A.

1.7. Calculer le demi-grand axe a_C de l'orbite.

1.8. Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon d_{ST} décrit uniformément, montrer que la période orbitale T_T de la Terre autour du Soleil est donnée par $T_T = \left(\frac{4\pi^2 d_{ST}^3}{GM_S}\right)^{1/2}$.

1.9. En utilisant la 3ème loi de Kepler, exprimer la période orbitale T_C de la comète Hale Bopp en fonction de a_C, T_T et d_{ST}.

1.10. Calculer T_C. En quelle année peut-on espérer revoir la comète Hall-Bopp ? S'agit-il d'une comète à courte période ou d'une comète à longue période ?

1.11. Exprimer l'énergie mécanique de la comète en fonction des paramètres au périhélie (l'énergie potentielle étant définie comme nulle à l'infini). En déduire qu'elle se met sous la forme :

$$E_m(C) = -\frac{1}{2} m_C \left(v_C^P\right)^2 \left(\frac{1-e_C}{1+e_C}\right)$$

Commenter le signe de l'énergie mécanique.

1.12. L'énergie mécanique de la comète vaut $E_m(C) = -4,49.10^{23} J$. Calculer la masse m_C de la comète. En considérant que la masse volumique des roches cométaire est très voisine de celle de l'eau et en faisant l'approximation d'une comète sphérique, calculer le rayon moyen R_C de cette comète.

2. La pression de radiation et la queue courbe de la comète

En observant la comète de Hale-Bopp en avril 1997, on a pu constater que le nuage gazeux appelé queue, qui accompagne la comète est derrière la comète quand celle-ci s'approche du Soleil et devant quand elle s'en éloigne. On peut en distinguer deux queues : la queue courbe est due à la pression de radiation du Soleil sur les poussières neutres de la comète tandis que la queue droite est due au vent solaire et provient de l'interaction de celui-ci avec les ions de la comète. La queue courbe de la comète est constituée par de petites particules, supposées parfaitement réfléchissantes, assimilées à des sphères homogènes de rayon b et de masse volumique μ . Une particule sphérique située dans l'espace interstellaire (assimilé au vide) à la distance r du Soleil reçoit de la part de cette étoile une énergie.

Afin de simplifier les calculs, on modélise la particule par son disque équivalent de rayon b, supposé conducteur parfait (Figure 2). On modélise la lumière solaire incidente normalement sur le disque équivalent par une onde incidente (O_i) plane progressive monochromatique caractérisée par le champ électrique $\underline{\vec{E_i}}(M,t) = E_0 \exp\left(j(\omega t - \vec{k}.\overrightarrow{OM})\right)\vec{e_y}$, d'amplitude E_0, de vecteur d'onde $\vec{k}$ et de pulsation ω ($\|\vec{k}\| = k = \dfrac{\omega}{c}$). L'onde incidente se réfléchit sur la particule et donne naissance à une onde réfléchie (O_r) de champ électrique $\underline{\vec{E_r}}(M,t) = -E_0 \exp\left(j(\omega t - \vec{k_r}.\overrightarrow{OM})\right)\vec{e_y}$. On admet que l'onde réfléchie est de même amplitude, de même pulsation, de même polarisation et que sa direction de propagation est conforme aux lois de Snell-Descartes de la réflexion.

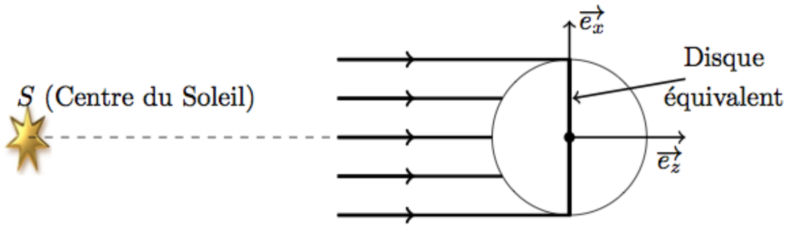

Figure 2 : pression de radiation

2.1. Exprimer les vecteurs d'onde $\vec{k}$ et $\vec{k_r}$ en fonction de ω, c et des vecteurs unitaires de la base $\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$.

2.2. Exprimer le champ électrique total $\underline{\overrightarrow{E_{tot}}}(M,t)$. En déduire le champ magnétique total $\underline{\overrightarrow{B_{tot}}}(M,t)$.

2.3. Commenter l'expression des champs $\underline{\overrightarrow{E_{tot}}}(M,t)$ et $\underline{\overrightarrow{B_{tot}}}(M,t)$ pour $z = 0$ (plan du disque équivalent).

2.4. Un élément de surface d'aire dS au point M du plan $z = 0$ subit une force $d\vec{F}$ de la part du champ électromagnétique. Justifier l'expression la force $d\vec{F}$ donnée par :

$$d\vec{F} = \frac{1}{2}\left(\sigma \overrightarrow{E_{tot}} + \vec{j_s} \wedge \overrightarrow{B_{tot}}\right) dS$$

2.5. Que vaut le champ électromagnétique dans un conducteur parfait ?

2.6. Exprimer la densité surfacique de charge σ et celle de courant $\vec{j_s}$ qui se développent en tout point M de la surface $z = 0$ du conducteur éclairé par l'onde solaire incidente.

2.7. Exprimer la moyenne temporelle $< d\vec{F} >$ de $d\vec{F}$.

2.8. Montrer que la pression de radiation s'écrit sous la forme : $P_{rad} = \varepsilon_0 E_0^2$.

On tient compte maintenant de la géométrie sphérique de la particule. On admet l'expression de la pression moyenne de radiation P_{rad} d'une onde électromagnétique plane, qui arrive sous l'angle d'incidence θ par rapport à la normale à la surface sphérique de la particule : $\mathrm{P}_{rad} = \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\theta)$. On se propose d'appliquer ce résultat à la lévitation, par le faisceau solaire, de la particule sphérique parfaitement réfléchissante de la queue de la comète.

2.9. Justifier que la force moyenne $\vec{F}$ exercée par le rayonnement solaire qui arrive sous l'angle d'incidence θ sur la particule est suivant Oz.

2.10. Montrer que la force $\vec{F}$ a pour expression :

$$\vec{F} = \frac{1}{4}\pi\varepsilon_0 b^2 E_0^2 \vec{e_z}$$

On souhaite exprimer la force $\vec{F}$ en fonction de la puissance P_S émise par le Soleil. On considère que toute la puissance électromagnétique P reçue par la particule est absorbée par celle-ci et que la force moyenne $\vec{F}$ exercée par le rayonnement solaire est donnée par $\vec{F} = \frac{P}{c}\vec{e_z}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

2.11. On suppose que la puissance émise par le Soleil se répartit de façon isotrope sur une sphère de rayon r et on admet que la particule intercepte cette sphère sur une section efficace de valeur πb^2. Exprimer la puissance laser P captée par la bille en fonction de P_S, b et r.

2.12. En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ en fonction de P_S, c, b et r.

2.13. Exprimer la force de gravitation $\vec{F_g}$ exercée par le Soleil sur la particule.

2.14. Exprimer la taille limite b_0 de la particule pour que la force de radiation due au rayonnement solaire soit égale à la force de gravitation.

2.15. Calculer b_0. On donne $\mu = 3.10^3 kg.m^{-3}$ et la puissance rayonnée ar le Soleil $P_S = 4.10^{26} W$. Justifier l'appellation de queue poussiéreuse ainsi que son allure courbée.

2.16. Comment expliquer que les particules restent dans le sillage de la comète ?