

ተግባራዊ ልምድ ለሰላም
ተግባራዊ ልምድ ለሰላም
ለ ግብርና ግብርና



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المدرسة الوطنية العليا للمعالم بالرباط
ተግባራዊ ልምድ ለሰላም ለሰላም ለሰላም ለሰላም
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE RABAT

CNC 2022

Concours National Commun

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et
Établissements Assimilés

<https://www.ensmr-cnc2022.ma/>

Correction ÉPREUVE DE PHYSIQUE 2

Concours MP

Pour toute réclamation, correction ou remarque, veuillez envoyer un message par l'émail
adoch.hasaan@gmail.com

Partie 1 : Champ magnétique d'une spire circulaire

1) En utilisant la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on remarque les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont des plans d'anti-symétrie alors le champ magnétique (qui est un pseudo-vecteur) appartient à ces plans donc le vecteur champ magnétique est porté par \vec{e}_z le vecteur commun entre les deux plans :

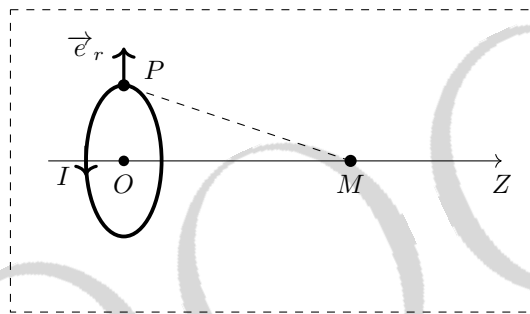
$$\vec{B}_{sp}(M) = B_{sp}(M) \vec{e}_z$$

2) En utilisant la loi de Biot et Savart, le champ magnétique créée par la spire est donné par :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{C} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

P est un point quelconque de la spire alors que $d\vec{C}$ est l'élément de courant correspondant avec :

$$d\vec{C} = I d\vec{l} = IR d\varphi \vec{e}_\varphi = IR d\varphi \vec{e}_\varphi \quad \text{Et} \quad \vec{PM} = -R\vec{e}_r + z\vec{e}_z \Rightarrow PM = \sqrt{R^2 + z^2}$$



Alors :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{IR d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge (-R\vec{e}_r + z\vec{e}_z)}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R\vec{e}_z + z\vec{e}_r}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

Selon la première question, le champ magnétique est suivant \vec{e}_z alors la composante suivant \vec{e}_r est nulle. Donc :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R\vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = \frac{\mu_0 IR}{4\pi} \frac{R\vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Or d'après le schéma, on remarque que :

$$\tan(\alpha) = \frac{R}{z} \quad 1 + \frac{z^2}{R^2} = 1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)}$$

Alors le champ magnétique créée en un point M de l'axe est donné par :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z$$

Pour O , on a $\alpha = \frac{\pi}{2}$ donc le champ magnétique est maximal :

$$\vec{B}_{sp}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$$

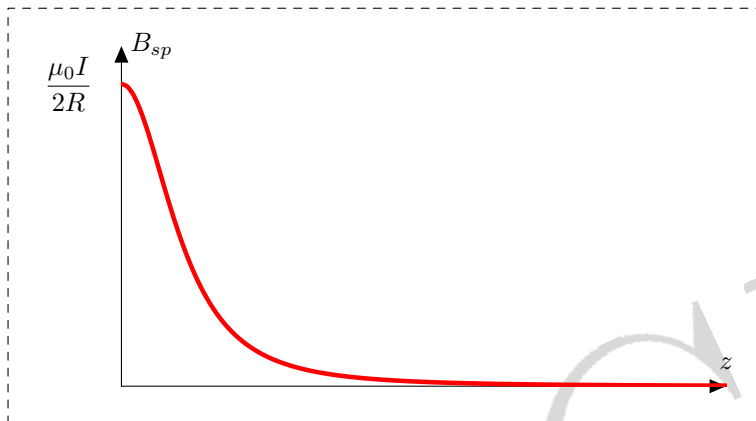
3) D'après la question précédente :

$$B_{sp}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Les limites de la fonction sont :

$$B_{sp}(z \rightarrow 0) = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad \text{et} \quad B_{sp}(z \rightarrow +\infty) = 0$$

Le fonction est continue et décroissante alors l'allure correspondante est :



4) Application numérique :

• Pour $I = 1 \text{ A}$, on a :

$$B_{sp}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 12,6 \mu\text{T}$$

• Pour $B_{sp}(O) = 1 \text{ T}$, on a :

$$I = \frac{2R}{\mu_0} B_{sp}(O) = 79577,5 \text{ A} = 79,6 \text{ kA}$$

On peut dire donc que l'unité tesla (T) est une unité très grande devant les champs ordinaires générés par les systèmes magnétiques. En pratique, un champ magnétique intense peut être trouvé au voisinage d'un pulsar (type d'étoile qui génère des champs de l'ordre de 10^{11} T) ou au voisinage d'un électro-aimant puissant (dans LHC par exemple, on génère des champs de l'ordre de 10 T):

Partie 2 : Radioactivité α

1. Traversée d'une barrière de potentiel

1.1) Lorsqu'on envoie une particule classique d'énergie E sur une barrière de potentiel $V_0 > E$, la mécanique classique prédit une réflexion totale de la particule.

1.2) Pour les états stationnaires, la solution s'écrit sous la forme :

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$$

Donc l'équation de Schrödinger dans ce cas est :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + V(x) \varphi(x) = E \varphi(x)$$

1.3) L'équation de Schrödinger peut être écrite sous la forme :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(x)) \varphi(x) = 0$$

C'est une équation différentielle de deuxième ordre dont la solution dépend de signe de $E - V(x)$ alors :

a) **Pour le domaine (1) :** $V(x) = 0$ donc l'équation devient :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow r = \pm i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm ik_1$$

La solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$\varphi_1(x) = A_1 \exp(ik_1x) + B_1 \exp(-ik_1x)$$

b) **Pour le domaine (2) :** $V(x) = V_0 > E$ donc l'équation devient :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} = \pm k_2$$

La solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$\varphi_2(x) = A_2 \exp(k_2x) + B_2 \exp(-k_2x)$$

c) **Pour le domaine (3) :** $V(x) = 0$ donc l'équation devient :

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \varphi(x) = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} = 0 \Rightarrow r = \pm i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} = \pm ik_3 = \pm ik_1$$

La solution générale s'écrit alors sous la forme :

$$\varphi_3(x) = A_3 \exp(ik_1x) + B_3 \exp(-ik_1x)$$

Donc la solution générale dans tout l'espace s'écrit :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) = A_1 \exp(ik_1x) + B_1 \exp(-ik_1x) & \text{si } x \leq 0 \\ \varphi_2(x) = A_2 \exp(k_2x) + B_2 \exp(-k_2x) & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \varphi_3(x) = A_3 \exp(ik_1x) + B_3 \exp(-ik_1x) & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

Avec :

$$k_1 = k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

et

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

1.4) Par définition :

$$\Psi(x, t) = \varphi(x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

Alors :

$$\Psi_1(x, t) = A_1 \exp i\left(k_1x - \frac{E}{\hbar}t\right) + B_1 \exp -i\left(k_1x + \frac{E}{\hbar}t\right)$$

La fonction d'onde dans le premier domaine est alors une combinaison d'une onde plane progressive monochromatique $A_1 \exp i\left(k_1x - \frac{E}{\hbar}t\right)$ incidente sur la barrière et une onde plane régressive monochromatique $B_1 \exp -i\left(k_1x + \frac{E}{\hbar}t\right)$ réfléchie.

Pour le deuxième domaines :

$$\Psi_2(x, t) = A_2 \exp(k_2x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right) + B_2 \exp(-k_2x) \exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right)$$

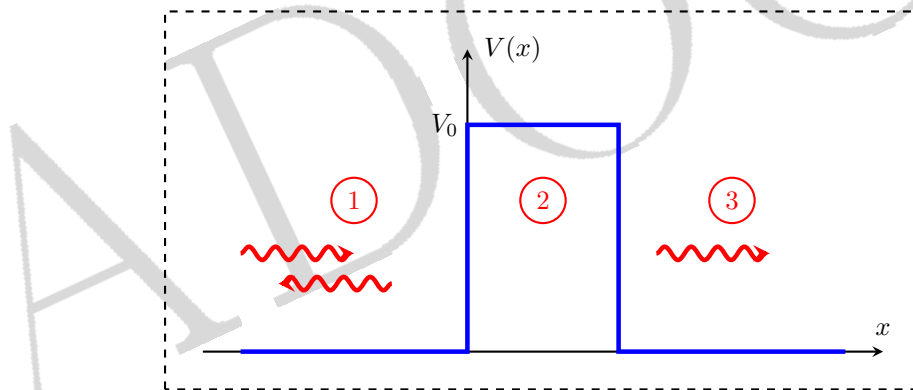
C'est une combinaison d'ondes évanescentes qui oscillent dans le temps mais pas dans l'espace. Le premier terme est une onde dont l'intensité augmente avec x alors que le deuxième terme est une onde dont l'intensité diminue avec x .

Pour le troisième domaine, l'expression est similaire à l'expression du premier domaine :

$$\Psi_3(x, t) = A_3 \exp i\left(k_1x - \frac{E}{\hbar}t\right) + B_3 \exp -i\left(k_1x + \frac{E}{\hbar}t\right)$$

La fonction d'onde dans le premier domaine est alors une combinaison d'une onde plane progressive monochromatique $A_3 \exp i\left(k_1x - \frac{E}{\hbar}t\right)$ incidente sur la barrière et une onde plane régressive monochromatique $B_3 \exp -i\left(k_1x + \frac{E}{\hbar}t\right)$ réfléchie.

1.5) La source est à gauche de la figure donc dans le domaine (3), on n'a pas de réflexion alors on ne peut pas avoir une onde régressive qui se propage dans le sens des x décroissants alors $B_3 = 0$.



1.6) La fonction $\varphi(x)$ est une fonction continue en $x = 0$ et $x = a$ alors :

$$\varphi_1(x = 0) = \varphi_2(x = 0) \quad \text{et} \quad \varphi_2(x = a) = \varphi_3(x = a)$$

Ce qui donne :

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2$$

et

$$A_2 \exp(k_2a) + B_2 \exp(-k_2a) = A_3 \exp(ik_1a)$$

La dérivée de $\varphi(x)$ est aussi continue en $x = 0$ et $x = a$ donc :

$$\frac{d\varphi_1(x)}{dx}(x = 0) = \frac{d\varphi_2(x)}{dx}(x = 0) \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi_2(x)}{dx}(x = a) = \frac{d\varphi_3(x)}{dx}(x = a)$$

Alors :

$$ik_1A - ik_1B_1 = k_2A_2 - k_2B_2$$

et

$$k_2A_2 \exp(k_2a) - k_2B_2 \exp(-k_2a) = ik_1A_3 \exp(ik_1a)$$

Ces quatre équations permet de déterminer toutes les constantes en fonction d'une seule (qu'on peut déterminer aussi en utilisant la condition de normalisation).

1.7) On a :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)sh^2(k_2a)}}$$

Dans l'approximation de la barrière épaisse $k_2a \gg 1$, on a :

$$\exp(-k_2a) \ll \exp(k_2a) \Rightarrow sh^2(ka) = \frac{1}{4}\exp(2k_2a) \gg 1$$

Alors :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)sh^2(k_2a)}} \simeq \frac{4}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)\exp(2k_2a)}} \\ &\simeq \frac{1}{\frac{4V_0^2}{4E(V_0 - E)\exp(2k_2a)}} \simeq \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2}\exp(-2k_2a) = T_0\exp(-\eta k_2a) \end{aligned}$$

Par identification, on a :

$$T_0 = \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2} \quad \text{et} \quad \eta = 2$$

1.8) Étude de la fonction :

$$T \simeq \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2}\exp(-2k_2a) \quad \text{avec} : \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

- **En fonction de a** : lorsque a augmente $\exp(-2k_2a)$ diminue donc le coefficient T diminue aussi. Alors La probabilité qu'une particule traverse la barrière devient plus faible.
- **En fonction de m** : lorsque m augmente, k_2 augmente donc $\exp(-2k_2a)$ diminue donc le coefficient T diminue aussi. Alors La probabilité qu'une particule traverse la barrière devient plus faible.
- **En fonction de E** : lorsque $(V_0 - E)$ augmente k_2 augmente donc $\exp(-2k_2a)$ diminue mais T_0 augmente. Mais physiquement l'augmentation de $(V_0 - E)$ correspond à l'augmentation de V_0 le potentiel de la barrière la diminution de l'énergie de la particule ce qui va diminuer la probabilité de passage de cette particule par la barrière donc T diminue.

1.9) Application numérique :

a) **Cas d'un cycliste** : c'est un objet macroscopique donc l'étude doit se faire par la mécanique classique qui prédit que le cycliste ne peut pas franchir la colline.

b) **cas d'un électron** : c'est objet microscopique donc on peut appliquer la mécanique quantique. Premièrement, on vérifie l'hypothèse de la barrière épaisse :

$$k_2a = a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \simeq 0,51$$

Donc l'hypothèse ($k_2a \gg 1$) n'est pas vérifiée alors on doit utiliser l'expression exacte :

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)sh^2(k_2a)}} \quad \text{A.N :} \quad T \simeq 0,23$$

La probabilité de passage de cet électron par la barrière est 0,23.

c) **cas d'un proton** : c'est objet microscopique donc on peut appliquer la mécanique quantique. Premièrement, on vérifie l'hypothèse de la barrière épaisse :

$$k_2a = a\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} \simeq 22 \gg 1$$

Donc on peut dire que l'hypothèse est vérifiée alors on peut appliquer l'expression approchée :

$$T = \frac{E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-2k_2 a) \quad A.N : \quad T = 1,88 \cdot 10^{-20}$$

Le coefficient de transmission est pratiquement nul donc la probabilité de passage d'un proton est pratiquement nulle.

2. Radioactivité α - loi de Gamow - Condon - Gurney

2.1) La cohésion entre deux entités de même charge dans le noyau est assurée par la force nucléaire forte. C'est la force la plus forte dans la nature mais sa portée est limitée à des distances de l'ordre de grandeur de noyau atomique 10^{-15} m

2.2) La particule α est émise avec une énergie E , et elle doit franchir une barrière de potentiel caractérisée par un potentiel $V_m > E$ donc classiquement c'est impossible mais l'effet Tunnel purement quantique permet d'expliquer cette émission car la probabilité d'avoir une particule α à l'autre coté de la barrière n'est pas nul.

2.3) D'après la relation de Louis de Broglie :

$$\lambda_{LDB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_\alpha E}}$$

A.N :

$$\lambda_{LDB} = 6,5410^{-15} \text{ m} = 6,54 \text{ fm}$$

La valeur obtenue a l'ordre de grandeur de la particule émise. donc la particule doit être étudiée quantiquement.

2.4) D'après le schéma :

$$V(r_0) = V_m = \frac{K}{r_0} = \frac{(Z-2)e^2}{2\pi\epsilon_0 r_0}$$

et

$$V(r_1) = E = \frac{K}{r_1} = \frac{(Z-2)e^2}{2\pi\epsilon_0 r_1}$$

A.N :

$$V_m = 33,93 \text{ MeV}$$

et

$$r_1 = 5,2 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

L'épaisseur de la barrière correspond à 6 fois le rayon du noyau atomique de radium.

2.5) La probabilité que la particule franchisse la barrière augmente lorsque la différence entre l'énergie E de la particule et le potentiel V_m de la barrière est faible. Le potentiel V_m est positif donc la particule va avoir une probabilité plus grande de franchir la barrière si l'énergie E est positive aussi.

2.6) **2.6.1)** Dans l'approximation de la barrière épaisse, on peut écrire le coefficient de transition en r et en $r + dr$ ce qui donne :

$$T(r) = \frac{E(V(r) - E)}{V(r)^2} \exp(-2k_2(r)r) \quad \text{et} \quad T(r + dr) = \frac{E(V(r) - E)}{V(r)^2} \exp(-2k_2(r)(r + dr))$$

Alors :

$$dT = T(r + dr) - T(r) = \frac{E(V(r) - E)}{V(r)^2} \exp(-2k_2(r)r) (\exp(-2k_2(r)dr) - 1)$$

Or dr est un infinitésimal donc un développement limité permet d'écrire que :

$$\exp(-2k_2(r)dr) \simeq 1 - 2k_2(r)dr$$

Alors :

$$dT = -2k_2(r)dr \frac{E(V(r) - E)}{V(r)^2} \exp(-2k_2(r)r) = -2k_2(r)dr T(r)$$

Donc :

$$\frac{dT}{T} = -2k_2(r)dr$$

Avec :

$$k_2(r) = \frac{\sqrt{2m_\alpha (V(r) - E)}}{\hbar}$$

2.6.2) En intégrant l'équation précédente entre $r = r_0$ et $r = r_1$, on trouve :

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dT}{T} = \text{Ln}(T(r_0)) - \text{Ln}(T(r_0)) = \text{Ln}(T(r_1)) = \int_{r_0}^{r_1} -2k_2(r)dr$$

Or :

$$\int_{r_0}^{r_1} -2k_2(r)dr = \int_{r_0}^{r_1} -2k_2(r)dr = -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{V(r) - E} dr = -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{K}{r} - E} dr = -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{K}{r} - \frac{K}{r_1}} dr$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$\text{Ln}(T(r_1)) = -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}\sqrt{K}}{\hbar} \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}} dr$$

2.6.3) En utilisant le fait que $r = r_1 \cos^2(\theta)$, on aura :

$$dr = -r_1 2\cos(\theta)\sin(\theta)d\theta$$

Donc l'intégral devient :

$$\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}} dr = \int_{\theta_0}^0 \sqrt{\frac{1}{r_1 \cos^2(\theta)} - \frac{1}{r_1}} (-r_1 2\cos(\theta)\sin(\theta)) d\theta \quad \text{Avec : } \theta_0 = \arccos\left(\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\right)$$

Ce qu'on peut simplifier sous la forme :

$$\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}} dr = 2\sqrt{r_1} \int_0^{\theta_0} \sqrt{1 + \tan^2(\theta) - 1} \sin(\theta)\cos(\theta) d\theta = 2\sqrt{r_1} \int_0^{\theta_0} \sin^2(\theta) d\theta = 2\sqrt{r_1} \int_0^{\theta_0} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

L'intégration donne :

$$\int_{r_0}^{r_1} \sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}} dr = 2\sqrt{r_1} \left[\frac{\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{\theta_0} = \sqrt{r_1} \left(\theta_0 - \frac{1}{2}\sin(2\theta_0) \right)$$

Donc :

$$\text{Ln}(T(r_1)) = -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}\sqrt{K}}{\hbar} \sqrt{r_1} \left(\theta_0 - \frac{1}{2}\sin(2\theta_0) \right) = -\frac{2\sqrt{2m_\alpha}\sqrt{K}}{\hbar} \sqrt{\frac{K}{E}} \left(\theta_0 - \frac{1}{2}\sin(2\theta_0) \right)$$

Donc :

$$\text{Ln}(T) = -\frac{2K\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar\sqrt{E}} \left(\theta_0 - \frac{1}{2}\sin(2\theta_0) \right) \quad \text{Avec : } \theta_0 = \arccos\left(\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\right)$$

2.6.4) On a :

$$\text{Ln}(T) = -\frac{2K\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar\sqrt{E}} \left(\theta_0 - \frac{1}{2}\sin(2\theta_0) \right)$$

Avec :

$$\theta_0 = \arccos\left(\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\right) \Rightarrow \sin(2\theta_0) = 2\cos(\theta_0)\sin(\theta_0) = 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}}$$

Or $r_0 \ll r_1$, donc en effectuant un développement limité à l'ordre 1, on écrit :

$$\sin(2\theta_0) = 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\sqrt{1 - \frac{r_0}{r_1}} \simeq 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \left(1 - \frac{r_0}{2r_1} \right) \simeq 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}$$

Et :

$$\theta_0 = \arccos\left(\sqrt{\frac{r_0}{r_1}}\right) \simeq \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{r_0}{r_1}}$$

Donc l'expression devient :

$$Ln(T) \simeq -\frac{2K\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar\sqrt{E}} \left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} - \sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \right) = -\frac{2K\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar\sqrt{E}} \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{\frac{r_0}{r_1}} \right)$$

Or $E = \frac{K}{r_1}$ donc $r_1 = \frac{K}{E}$ ce qui permet de trouver la formule de Gamow- Condon - Gurney :

$$Ln(T) \simeq \frac{4\sqrt{2m_\alpha r_0 K}}{\hbar} - \frac{K\pi\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar\sqrt{E}} = c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{E}}$$

Par identification, on a :

$$c_1 = \frac{4\sqrt{2m_\alpha r_0 K}}{\hbar}$$

et

$$c_2 = -\frac{K\pi\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar}$$

2.7) Le nombre dN de noyaux désintègrent pendant dt est proportionnelle au nombre N de noyau non restant, à la durée dt donc :

$$dN = -\lambda N dt$$

L'activité est donc :

$$a^* = -\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Alors $N(t)$ est régit par l'équation :

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire de premier ordre dont l'équation générale s'écrit sous la forme :

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

2.8) Par définition :

$$N(\Theta) = \frac{N_0}{2} = N_0 \exp(-\lambda\Theta)$$

Alors :

$$\Theta = \frac{Ln(2)}{\lambda}$$

A.N :

$$\Theta = 1600,8 \text{ ans}$$

2.9) 2.9.1) On peut considérer que la particule (ponctuelle) à l'intérieur du noyau est un système classique conservatif donc l'énergie de cette particule est constante alors :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv_0^2 - V_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2(E + V_0)}{m}}$$

2.9.2) Par définition la fréquence d'oscillation dans ce cas c'est l'inverse de la durée Δt d'une oscillation avec la vitesse v_0 .
Donc :

$$v_0 \Delta t = 2r_0$$

Alors :

$$f = \frac{1}{\Delta t} = \frac{v_0}{2r_0}$$

2.9.3) Le nombre N_α de particules α émise par unité de temps est le produit de nombre de particule en collision avec la paroi par unité de temps (c'est le nombre totale fois la fréquence) et la probabilité de passage T donc :

$$N_\alpha = N f T = N \frac{v_0}{2r_0} T = N \frac{v_0 T}{2r_0}$$

Pendant une durée dt , le nombre de noyaux qui se désintègrent est :

$$dN = -N_\alpha dt = -N \frac{v_0 T}{2r_0} dt$$

2.9.4) D'après la question 2.9.3, on a :

$$dN = -\lambda N dt$$

Alors par identification avec l'expression de la question précédente, on a :

$$\lambda = \frac{v_0 T}{2r_0}$$

2.9.5) D'après la question 2.8, la période radioactive est donnée par :

$$\Theta = \frac{\text{Ln}(2)}{\lambda} \Rightarrow \text{Ln}(\Theta) = \text{Ln}(\text{Ln}(2)) - \text{Ln}(\lambda) = \text{Ln}(\text{Ln}(2)) - \text{Ln}\left(\frac{v_0 T}{2r_0}\right) = \text{Ln}(\text{Ln}(2)) - \text{Ln}\left(\frac{v_0}{2r_0}\right) - \text{Ln}(T)$$

Or d'après la question 2.6.4 :

$$\text{Ln}(T) = c_1 + \frac{c_2}{\sqrt{E}}$$

Donc :

$$\text{Ln}(\Theta) = \text{Ln}(\text{Ln}(2)) - \text{Ln}\left(\frac{v_0}{2r_0}\right) - c_1 - \frac{c_2}{\sqrt{E}} = c_3 + \frac{c_4}{\sqrt{E}}$$

Par identification :

$$c_3 = \text{Ln}(\text{Ln}(2)) - \text{Ln}\left(\frac{v_0}{2r_0}\right) - c_1 = \text{Ln}(\text{Ln}(2)) - \text{Ln}\left(\frac{v_0}{2r_0}\right) - \frac{4\sqrt{2m_\alpha r_0 K}}{\hbar}$$

et

$$c_4 = -c_2 = \frac{K\pi\sqrt{2m_\alpha}}{\hbar}$$

2.9.6) La courbe expérimentale est pratiquement en accord avec le résultat théorique pour la majorité des noyaux. Pour certains noyaux, on remarque un écart entre la valeur théorique de l'énergie et la valeur expérimentale. L'écart relative de ces éléments par rapport à la courbe théorique est plus faible que 20% donc on peut considérer que cette théorie est une première approximation qu'on peut améliorer.