

- On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.
 - Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
 - Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.
- Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties de l'épreuve sont relativement indépendantes entre elles.

La plongée sous-marine

L'exploration des mers et des océans par plongée sous-marine s'appuie sur des lois physiques simples. Ces lois doivent être connues et scrupuleusement prises en compte par un plongeur. D'autre part, la plongée nécessite de disposer d'un équipement particulier et de respecter des règles de sécurité.

Le sujet est composé de deux parties indépendantes. La partie 1 est notée sur **4 points**, la partie 2 sur **16 points**.

Données :

- Masse molaire de l'air : $M_a = 29 \text{ g.mol}^{-1}$.
- Accélération de pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.
- Température du corps humain : $T_0 = 37^\circ\text{C}$.
- Capacité thermique massique du corps humain : $c_c = 3,5 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.
- Résistance thermique de la peau du corps humain : $R_{th}^p = 3.10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$.
- Surface de la peau du corps humain : $S_p = 2 \text{ m}^2$.
- Conductivité thermique de la combinaison en néoprène : $\lambda_{th}^{cb} = 0,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.
- Puissance produite par le métabolisme du corps humain : $P_c = 100\text{W}$.
- $1 \text{ bar} = 1,013.10^5 \text{ Pa}$.
- Équation fondamentale de la statique des fluides : $-\overrightarrow{\text{grad}}(P(M)) + \rho(M)\vec{g}(M) = \vec{0}$.

On considère un bassin océanique calme que l'on modélise par une couche unique d'eau immobile, de profondeur H . L'eau du bassin constitue un liquide homogène, isotherme, de température $T_e = 20^\circ\text{C}$, de masse volumique ρ , en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\vec{e}_z$ uniforme, d'intensité g constante.

On suppose que le référentiel d'étude, lié au bassin, est galiléen. L'axe Oz du repère $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est descendant et la référence $z = 0$ des profondeurs d'eau est choisie à la surface du bassin (figure 1).

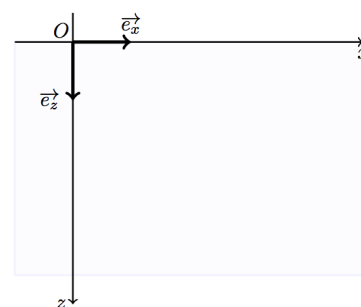


Figure 1 : Bassin océanique

On admet que la pression dans le fluide ne dépend que de la profondeur z . On note $P(z = 0) = P_0 = 1\text{bar}$ la pression atmosphérique à la surface libre du bassin.

Partie 1

La compressibilité de l'eau de mer

On s'intéresse dans cette partie à l'évolution de la pression $P(z)$ dans le bassin océanique.

1. On suppose dans cette question l'eau du bassin incompressible, $\rho = \rho_0 = 1,025 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.
 - 1.1. Montrer que la pression $P(z)$ de l'eau en un point de profondeur z est donnée par $P(z) = P_0 + \rho_0 g z$.
 - 1.2. Représenter graphiquement l'allure de la courbe $P(z)$.
 - 1.3. Quelle est la valeur numérique de la pente de la droite $P(z)$? La règle des plongeurs "1 bar tous les 10 mètres" est-elle valable ?
2. On suppose dans cette question l'eau du bassin compressible. La masse volumique de l'eau du bassin varie avec la pression selon la loi $\rho = \rho_0 [1 + a(P - P_0)]$, où $a = 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et $\rho_0 = 1,025 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ à la température $T_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.
 - 2.1. Déterminer la loi de variation de la pression $P(z)$ en un point de profondeur z .
 - 2.2. Que devient cette loi pour de faibles profondeurs ? Commenter.
 - 2.3. Calculer les pressions P_c (pour l'eau compressible) et P_{inc} (pour l'eau incompressible) pour les profondeurs $z_1 = 10 \text{ m}$, $z_2 = 40 \text{ m}$ et $z_3 = 1 \text{ km}$. Quelle est l'erreur relative commise pour la profondeur $z_3 = 1 \text{ km}$ en utilisant l'expression approchée de la pression ? Conclure.

Dans la suite, on supposera l'eau du bassin incompressible et de masse volumique $\rho = \rho_0 = 1,025 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. La pression de l'eau en un point de profondeur z est : $P(z) = P_0 + \rho_0 g z$.

Partie 2

La plongée sous-marine

1. Plongée sous-marine

Le corps d'un plongeur, de masse $m = 80 \text{ kg}$, peut-être considéré, à l'exception de ses poumons, comme incompressible. Lors de la respiration, la majorité des gaz inspirés par le plongeur vont dans les poumons et une partie de ces gaz va se dissoudre dans le sang.

Le plongeur a une capacité pulmonaire (volume maximal d'air dans les poumons lors d'une inspiration complète) $V_M = 7,0 \text{ L}$. Lors d'une expiration complète, le volume des poumons est $V_m = 1,5 \text{ L}$. Le reste du corps a un volume $V_0 = 77 \text{ L}$.

On caractérise l'air contenu dans les poumons du plongeur, de volume $V(z)$ variable en fonction de la profondeur, par la pression $P(z)$ égale à celle de l'eau du bassin à la profondeur z . Cet air, de température supposée constante, est assimilé à un gaz parfait.

- 1.1. On suppose dans cette question que le plongeur inspire totalement avant d'entamer sa descente puis plonge en apnée (plongée libre sans bouteille) en bloquant sa respiration.
 - 1.1.1. En utilisant la loi de BOYLE-MARIOTTE, établir l'expression du volume $V(z)$ des poumons du plongeur en fonction de la profondeur z à laquelle il descend. Comment varie le volume des poumons en fonction de la profondeur ?
 - 1.1.2. Faire le bilan des forces qui s'appliquent au plongeur.
 - 1.1.3. Calculer numériquement la profondeur z_M pour laquelle la résultante des forces qui s'appliquent au plongeur est nulle.

- 1.1.4. Calculer numériquement la profondeur z_m lorsque le volume des poumons atteint la valeur minimale V_m .
- 1.2. On suppose dans cette question que le plongeur s'équipe d'une bouteille d'air comprimé qui lui fournit, grâce à un détendeur, de l'air à la même pression que l'eau à la profondeur où il se trouve. Le volume de la bouteille est $V_b = 12 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$. L'air est composé de dioxygène et de diazote avec les titres molaires respectifs $x_{O_2} = 0,20$ et $x_{N_2} = 0,80$.
- 1.2.1. Calculer les pressions partielles en diazote et en dioxygène, P_{N_2} et P_{O_2} , dans l'air fourni au plongeur à la profondeur $z_2 = 40 \text{ m}$.
- 1.2.2. En profondeur, l'augmentation de la pression partielle en diazote provoque un trouble du système nerveux nommé aussi narcose à l'azote. Lorsque la pression partielle en diazote devient égale à $P_l = 4,0 \text{ bar}$, le plongeur ressent l'ivresse des profondeurs. On note z_i la profondeur correspondante. Calculer numériquement la pression $P(z_i)$ de l'air à partir de laquelle le plongeur ressent l'ivresse des profondeurs.
- 1.2.3. Déduire la valeur numérique de la profondeur z_i à laquelle se manifeste le phénomène d'ivresse des profondeurs.

2. Principe d'une bouteille de plongée

Pour pratiquer la plongée sous-marine, un plongeur utilise une bouteille en acier dans laquelle de l'air est stocké sous forme de gaz comprimé à la pression $P_b = 200 \text{ bar}$. La bouteille de plongée (figure 2) est munie de deux détendeurs de type capillaire qui permettent au plongeur de respirer de l'air à la même pression que celle de l'eau à la profondeur où il se trouve. On suppose l'écoulement de l'air stationnaire, la conduite horizontale et on néglige toute variation d'énergie cinétique. Les détendeurs n'ont pas de pièces mobiles. Lors de la plongée, l'air subit les transformations suivantes :

- Transformation $E_1 \rightarrow E_2$: Dans le détendeur du premier étage placé sur la bouteille, l'air subit une première détente isenthalpique et adiabatique de la haute pression (200 bar) vers une moyenne pression (10 bar).
- Transformation $E_2 \rightarrow E_3$: L'air se réchauffe de manière isobare en circulant dans le tuyau arrivant jusqu'au deuxième détendeur placé au niveau de la bouche du plongeur. Il se met en équilibre thermique avec l'eau environnante supposée à la température $T_1 = T_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.
- Transformation $E_3 \rightarrow E_4$: Le détendeur du deuxième étage assure la détente isenthalpique et adiabatique de l'air vers la basse pression (1 bar).

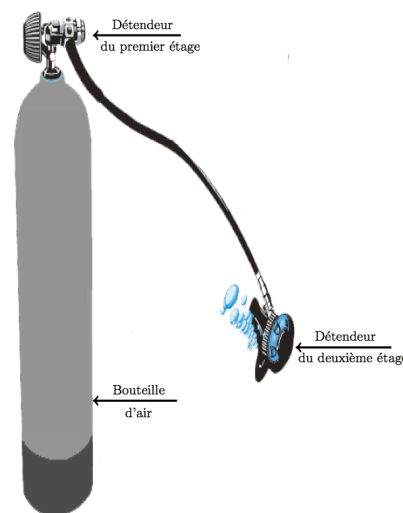


Figure 2 : Bouteille de plongée

Le document donné en annexe (**à rendre avec le cahier de composition**) représente le diagramme pression-enthalpie massique (P, h) de l'air. Sur ce diagramme figurent : un réseau d'isothermes et un réseau d'isentropiques. La température T est en $^\circ\text{C}$, la pression P en bar , l'enthalpie massique h en $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et l'entropie massique s en $\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

On considère que le plongeur inhale environ $V = 0,5 \text{ L}$ d'air à chaque inspiration.

- 2.1. Représenter l'évolution $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4$ subie par l'air sur le diagramme des frigorigènes de l'air (P, h) donné en annexe.
- 2.2. Que vaut la température T_2 à la fin de la première détente ? Commenter.
- 2.3. Que vaut la température T_4 à la fin de la seconde détente ? Expliquer pourquoi le plongeur ne ressent pas de sensation d'air froid lors de l'inspiration.
- 2.4. Rappeler la 2^{ème} loi de JOULE relative à l'enthalpie d'un gaz parfait. Quelle est l'allure d'une transformation isenthalpique d'un tel gaz dans un diagramme (P, h) ?
- 2.5. Sur le diagramme (P, h) donné en annexe, les transformations isenthalpiques sont-elles conformes aux propriétés d'un gaz parfait ?
- 2.6. Justifier qu'au point E_4 le modèle du gaz parfait est le mieux vérifié. En déduire la masse d'air m_a inhalée à chaque inspiration.
- 2.7. Exprimer littéralement puis calculer numériquement le transfert thermique Q que reçoit la masse d'air m_a inhalée à chaque inspiration lors de son passage dans le tube qui sépare les deux détendeurs.
- 2.8. Exprimer littéralement puis calculer numériquement la variation ΔS de l'entropie de la masse d'air m_a inhalée à chaque inspiration.
- 2.9. En déduire l'entropie S_c créée pendant tout le processus $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4$. Commenter.

3. Confort thermique du plongeur

3.1. On s'intéresse au transfert thermique dans une plaque plane d'épaisseur e , de surface S , faite dans un matériau de conductivité thermique λ_m . On suppose que ce transfert est unidimensionnel selon l'axe Ox et on se place en régime stationnaire : $T = T(x)$. On désigne par T_e , la température en $x = 0$ et T_s , la température en $x = e$ ($T_e > T_s$). On rappelle la loi de FOURIER donnant le vecteur densité de courant thermique :

$$\vec{j}_{th}^{cd}(M, t) = -\lambda_{th} \overrightarrow{grad}(T(M, t)).$$

3.1.1. Donner la relation entre la puissance thermique P_{th}^{cd} à travers la surface S de la plaque et \vec{j}_{th}^{cd} .

3.1.2. Justifier que le flux thermique est le même à travers toutes les sections de la paroi.

3.1.3. Établir le profil de température $T(x)$ dans la plaque en fonction de T_e et T_s .

3.1.4. On définit la résistance thermique R_{th}^{cd} d'une paroi de surface par la relation $R_{th}^{cd} = \frac{\Delta T}{P_{th}^{cd}}$, avec

ΔT la différence de température entre les deux extrémités de la plaque. Établir l'expression de R_{th}^{cd} en fonction de e , λ_{th} et S .

Le plongeur, de masse m , risque de souffrir d'hypothermie lorsque la température de son corps passe en-dessous de $T_h = 35^\circ C$. La puissance surfacique de perte du corps humain dans l'eau (par convection) a pour expression $\varphi_{th}^{cv} = h_{th}^{cv}(T_e - T)$, avec T la température de la peau et T_e la température de l'eau. $h_{th}^{cv} = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{kg}^{-1}$ est le coefficient d'échange surfacique peau-eau.

On suppose que l'on travaille dans le cadre de l'approximation du régime quasi-stationnaire afin d'utiliser les résistances thermiques.

3.2. On suppose dans cette question que le plongeur ne porte pas la combinaison.

3.2.1. Exprimer la résistance thermique R_{th}^{cv} associée à la puissance P_{th}^{cv} de perte du corps humain à travers la peau de surface S_p . En déduire la valeur numérique de la résistance thermique totale R_{th}^t résultant de la résistance de la peau (R_{th}^p) et celle convective (R_{th}^{cv}).

- 3.2.2. Donner l'expression de la variation élémentaire de l'enthalpie dH du plongeur lorsque la température $T(t)$ (t représente le temps) de son corps varie de dT .
- 3.2.3. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au plongeur. Montrer que la température du plongeur obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T - T_e}{\tau} = \frac{P_c}{C}$$

Donner l'expression de τ et celle de C en fonction de m , c_c et R_{th}' .

- 3.2.4. En considérant la chute de température du plongeur qui conduit à l'hypothermie est bien plus faible que l'écart de température entre le corps et l'eau de mer, estimer grossièrement, sans résoudre l'équation différentielle de la question précédente, l'ordre de grandeur du temps Δt_{es} au bout duquel il y a risque d'hypothermie du plongeur dans la mer à $T_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.
- 3.3. On suppose dans cette question que le plongeur porte la combinaison. Cette combinaison, modélisée comme une paroi plane d'épaisseur e_{cb} et de conductivité thermique λ_{th}^{cb} , est fabriquée en néoprène (caoutchouc synthétique à base de polychloroprène). Elle agit comme une barrière thermique entre le corps du plongeur et l'eau froide, permettant de maintenir la température corporelle stable et de réduire le risque d'hypothermie.
- 3.3.1. Exprimer la résistance thermique R_{th}^{cb} de la combinaison en fonction de e_{cb} , λ_{th}^{cb} et S_p .
- 3.3.2. Appliquer le premier principe de la thermodynamique au plongeur portant la combinaison. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(t)$ du plongeur.
- 3.3.3. Exprimer la température T_∞ atteinte par le corps du plongeur lorsque le régime transitoire est terminé.
- 3.3.4. Déterminer l'épaisseur e_{cb} de la combinaison de plongée qui permettra au plongeur d'éviter l'hypothermie lors d'une baignade infiniment longue.

4. Mesure de la pression

Le plongeur contrôle son autonomie et le déroulement de sa plongée à l'aide d'un ordinateur de bord muni de capteurs et permettant de contrôler des paramètres comme la profondeur, la température, la durée de la plongée, la température et la pression de l'air dans la bouteille. On s'intéresse dans cette partie au principe de fonctionnement d'un capteur de pression à jauge d'extensométrie : c'est un capteur résistif, de résistance R_p , implantée sur une membrane élastomère et plongée dans le compartiment haute pression. La résistance R_p est sensible à la différence de pression existant entre les faces de la membrane. Lorsque la pression de l'air dans le compartiment haute pression varie de ΔP , la résistance R_p varie de la quantité ΔR_p donnée par :

$$\Delta R_p = \alpha R_0 \Delta P, \text{ où } \alpha \text{ est une constante qui a pour valeur } \alpha = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}.$$

La résistance R_p est insérée dans un pont de WHEATSTONE alimenté par un générateur de tension continue E (figure 3). On cherche à rendre la tension U_c image de la résistance R_p et donc de la pression.

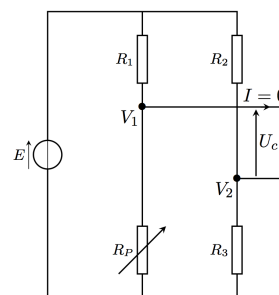


Figure 3 : Capteur de pression

- 4.1. Établir l'expression de la tension U_c en fonction des données du circuit de la figure 3.
 Dans la suite, on prendra $R_1 = R_2 = R_3 = R_0 = 500 \text{ } \Omega$ et $E = 12 \text{ V}$.

- 4.2. Le pont de WHEATSTONE est à l'équilibre lorsque $U_c = 0$. Exprimer R_p dans cette configuration.

On part d'une situation du pont de WHEATSTONE équilibré. On suppose que la jauge d'extensométrie est soumise à une variation de pression ΔP telle que la résistance R_p s'exprime par $R_p = R_0 + \Delta R_p$ avec $\frac{\Delta R_p}{R_0} \ll 1$. Dans ces conditions, le pont n'est plus équilibré.

4.3. Montrer que la tension U_c est donnée par : $U_c = \frac{1}{4} \alpha E \Delta P$.

La tension U_c est un signal analogique. Pour être traitée par l'ordinateur de bord du plongeur, cette tension est amplifiée par un amplificateur qui délivre la tension $U_a = \beta U_c$, avec β une constante. Le schéma de la figure 4 donne le principe du circuit de conditionnement de la tension U_c . Tous les amplificateurs de différence intégrés sont supposés parfaits et fonctionnent en régime linéaire.

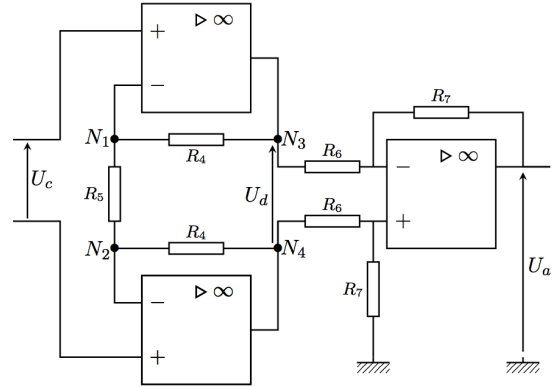


Figure 4 : Circuit de conditionnement

- 4.4. Pourquoi peut-on supposer que les trois amplificateurs de différence intégrés fonctionnent en régime linéaire ?
- 4.5. Montrer que la tension U_d s'écrit sous la forme $U_d = A_d U_c$. Donner l'expression de A_d en fonction de R_4 et R_5 .
- 4.6. Établir l'expression de la tension U_a et la mettre sous la forme $U_a = A_a U_d$. Donner l'expression de A_a en fonction de R_6 et R_7 . En déduire l'expression de β en fonction des résistances.
- 4.7. Mettre la tension U_a sous la forme $U_a = A \Delta P$ et donner l'expression de A .
- 4.8. La tension analogique U_a , tension image de la pression, est mise en forme et varie de 0 à 10 V. Elle est ensuite convertie en un signal binaire à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique (CAN) dont le principe est donné par la figure 5.

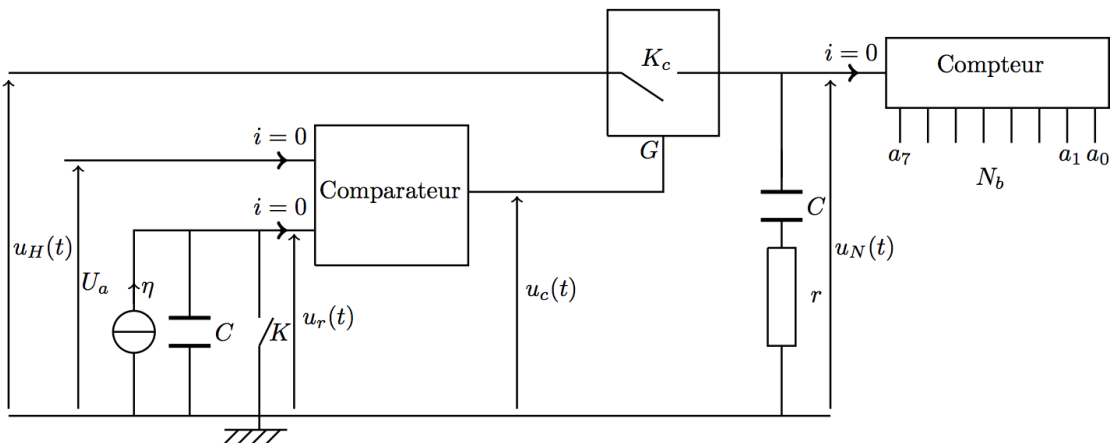


Figure 5 : Convertisseur Analogique Numérique (CAN)

Le générateur de courant fournit une intensité constante η dans sa branche. La tension U_a , supposée constante pendant le processus de conversion, est comparée à une tension de référence $u_r(t)$. Le comparateur, supposé idéal, délivre une tension $u_c(t) = +15V$ si $u_r(t) > U_a$, et $u_c(t) = -15V$ si $u_r(t) < U_a$.

Une horloge fournit une tension créneaux $u_H(t)$ de période T_H :

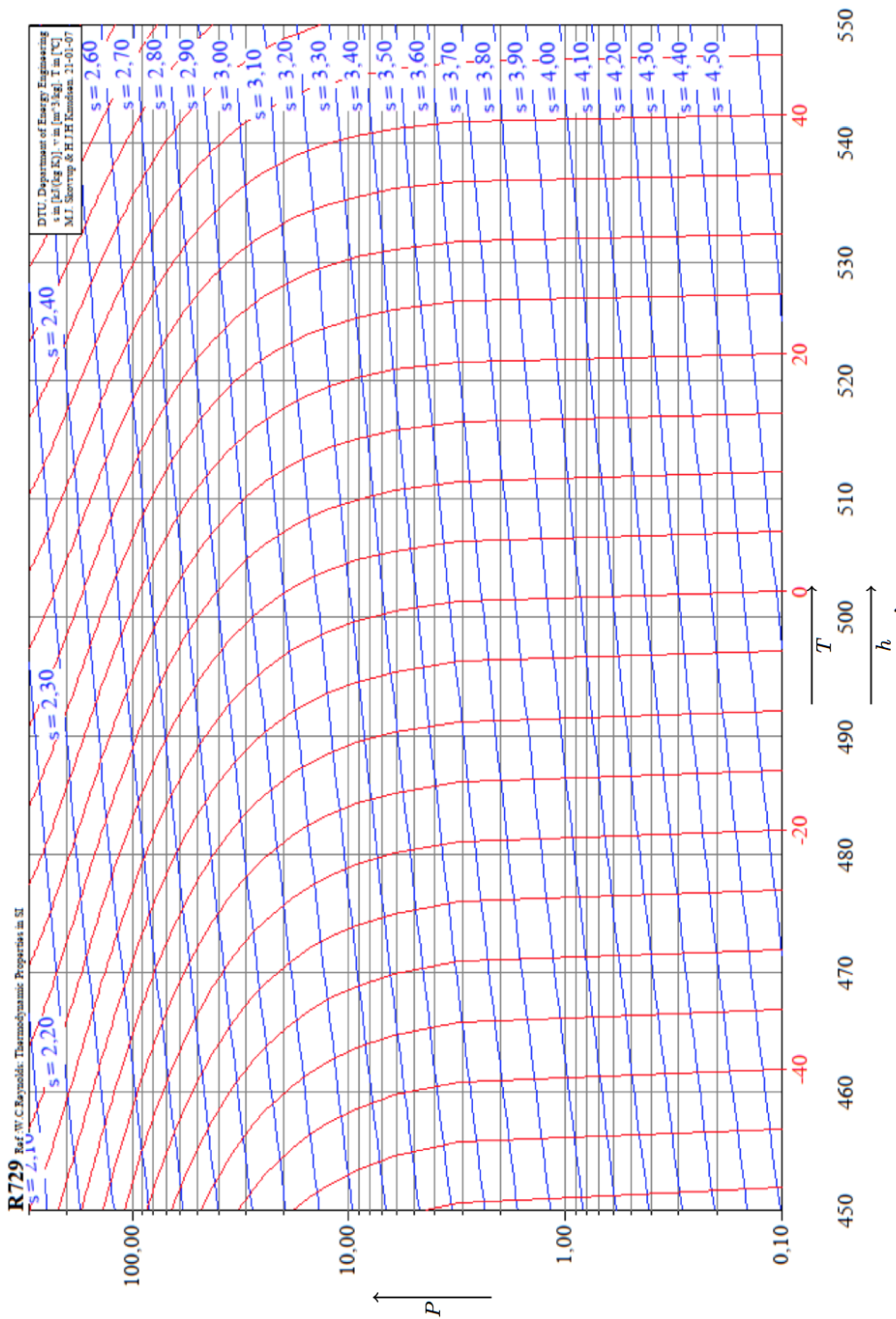
$$u_H(t) = \begin{cases} 0V & \text{si } t \in \left[nT_H, \left(n + \frac{1}{2} \right) T_H \right[\\ +15V & \text{si } t \in \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) T_H, (n+1)T_H \right[\end{cases}$$

K_c est un interrupteur commandé par la gachette G , il est fermé si le potentiel de la gachette est négatif, ouvert s'il est positif.

Le compteur compte le nombre d'impulsions, une impulsion étant un basculement de la tension $u_N(t)$ de 0 à +15V. Il est remis à zéro entre deux acquisitions.

L'image binaire résultant de la conversion de la tension analogique U_a se trouve en sortie du compteur.

- 4.8.1. À $t=0$, l'interrupteur K passe de la position fermée à la position ouverte. Établir l'expression de la tension $u_r(t)$ pour $t \geq 0$.
- 4.8.2. Sur un même graphique, tracer l'allure des courbes U_a , $u_r(t)$ et $u_H(t)$ avec les valeurs numériques $U_a = 7,31V$, $\eta = 10mA$, $C = 10\mu F$ et $T_H = 1,0ms$. Calculer la valeur de T_r , instant d'intersection des deux courbes U_a et $u_r(t)$.
- 4.8.3. Déterminer l'évolution dans le temps de $u_c(t)$ pour $t \leq T_r$ et pour $t > T_r$.
- 4.8.4. Déterminer l'évolution dans le temps de $u_N(t)$ en supposant que $rC \ll T_H$. Combien d'impulsions le compteur a-t-il compté ?
- 4.8.5. En déduire qu'on a ainsi réalisé un CAN dont la précision est le volt. Quelle valeur faut-il donner à T_H pour obtenir une précision de 0,1V ?



Annexe : Diagramme des frigorigènes de l'air (À rendre avec le cahier de composition)