

ተዕዛዝ፣ ተዕዛዝ ለግብርና  
ተዕዛዝ ለግብርና ለግብርና  
ለ ግብርና ለግብርና



المملكة المغربية  
وزارة التربية الوطنية  
والتكوين المهني

المدرسة الوطنية العليا للمعالم بالرباط  
ተዕዛዝ ተዕዛዝ ተዕዛዝ ለግብርና  
ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE RABAT

**CNC 2022**

Concours National Commun

d'Admission dans les Établissements de Formation d'Ingénieurs et  
Établissements Assimilés

<https://www.ensmr-cnc2022.ma/>

## Correction ÉPREUVE DE PHYSIQUE 2

Concours PSI

Pour toute réclamation, correction ou remarque, veuillez envoyer un message par l'émail  
[adoch.hasaan@gmail.com](mailto:adoch.hasaan@gmail.com)

## Partie 1 : Champ magnétique d'une spire circulaire

1) En utilisant la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ , on remarque les plans  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  et  $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  sont des plans d'anti-symétrie alors le champ magnétique (qui est un pseudo-vecteur) appartient à ces plans donc le vecteur champ magnétique est porté par  $\vec{e}_z$  le vecteur commun entre les deux plans :

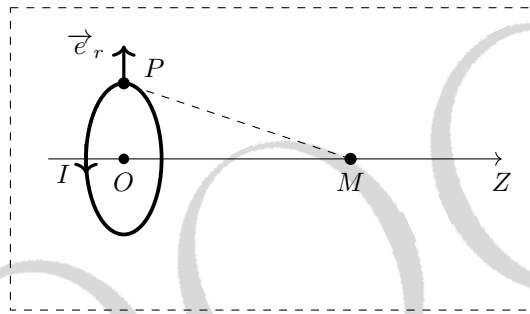
$$\vec{B}_{sp}(M) = B_{sp}(M) \vec{e}_z$$

2) En utilisant la loi de Biot et Savart, le champ magnétique créée par la spire est donné par :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{d\vec{C} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$P$  est un point quelconque de la spire alors que  $d\vec{C}$  est l'élément de courant correspondant avec :

$$d\vec{C} = I d\vec{l} = I R d\varphi \vec{e}_\varphi = I a d\varphi \vec{e}_\varphi \quad \text{Et} \quad \overrightarrow{PM} = -a \vec{e}_r + z \vec{e}_z \Rightarrow PM = \sqrt{a^2 + z^2}$$



Alors :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge (-a \vec{e}_r + z \vec{e}_z)}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \vec{e}_z + z \vec{e}_r}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

Selon la première question, le champ magnétique est suivant  $\vec{e}_z$  alors la composante suivant  $\vec{e}_r$  est nulle. Donc :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a \vec{e}_z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi = \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{a \vec{e}_z}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{e}_z \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Or d'après le schéma, on remarque que :

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{z} \Rightarrow 1 + \frac{z^2}{R^2} = 1 + \frac{1}{\tan^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin(\alpha)^2}$$

Alors le champ magnétique créée en un point  $M$  de l'axe est donné par :

$$\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z$$

Pour  $O$ , on a  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  donc le champ magnétique est maximal :

$$\vec{B}_{sp}(O) = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{e}_z$$

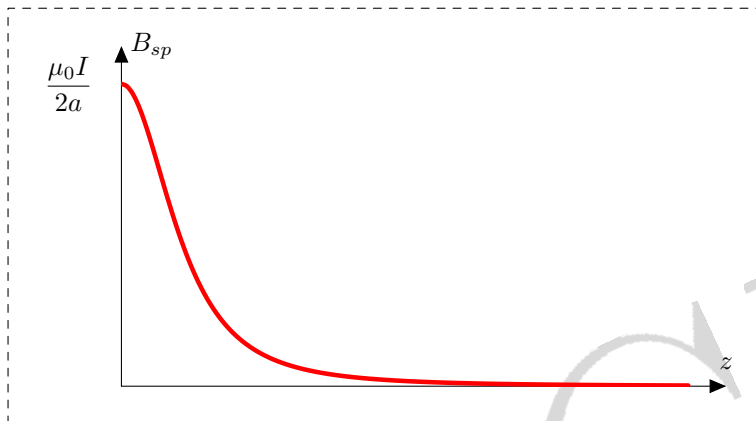
3) D'après la question précédente :

$$B_{sp}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \frac{1}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Les limites de la fonction sont :

$$B_{sp}(z \rightarrow 0) = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad \text{et} \quad B_{sp}(z \rightarrow +\infty) = 0$$

Le fonction est continue et décroissante alors l'allure correspondante est :



4) Application numérique :

• Pour  $I = 1 \text{ A}$ , on a :

$$B_{sp}(O) = \frac{\mu_0 I}{2a} = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 12,6 \mu\text{T}$$

• Pour  $B_{sp}(O) = 1 \text{ T}$ , on a :

$$I = \frac{2a}{\mu_0} B_{sp}(O) = 79577,5 \text{ A} = 79,6 \text{ kA}$$

On peut dire donc que l'unité tesla ( $T$ ) est une unité très grande devant les champs ordinaires générés par les systèmes magnétiques. En pratique, un champ magnétique intense peut être trouvé au voisinage d'un pulsar (type d'étoile qui génère des champs de l'ordre de  $10^{11} \text{ T}$ ) ou au voisinage d'un électro-aimant puissant (dans LHC par exemple, on génère des champs de l'ordre de  $10 \text{ T}$ ):

## Partie 2 : Modélisation d'une bobine

### 1. Champ magnétique créée par une bobine infinie

1.1) Le champ magnétique créée par la bobine peut être obtenu - D'après le théorème de superposition - par une sommation du champ créée par portion d'épaisseur  $dz$  (qui peut être modélisée par une spire circulaire de rayon  $a$ ). le champ élémentaire créée par la bobine est alors donnée par :

$$d\vec{B}_{so}(M) = Nd\vec{B}_{spire}(M) = n \cdot dz \vec{B}_{so}(M)$$

Le champ magnétique créée en un point  $M$  de l'axe est donc :

$$\vec{B}_{so}(M) = n \int \vec{B}_{spire}(M) dz$$

Or d'après la question 2 de la partie 1.

$$\vec{B}_{spire}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3(\alpha) \vec{e}_z$$

Et d'après le schéma de la première partie :

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{z} \Rightarrow z = \frac{a}{\tan(\alpha)} \Rightarrow dz = \frac{a d\alpha}{\sin^2(\alpha)}$$

Alors :

$$\vec{B}_{so}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^3(\alpha) \frac{a d\alpha}{\sin^2(\alpha)} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin(\alpha) \vec{e}_z$$

Donc :

$$\vec{B}_{so}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)) \vec{e}_z$$

1.2) Pour une bobine infinie, on aura :

$$\alpha_1 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \pi$$

Donc :

$$\vec{B}_{so}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

1.3) Pour montrer que  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_z$ , on utilise l'étude de la symétrie et l'invariance.

• **Étude de la symétrie** : La bobine possède  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  comme plan de symétrie alors :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$$

• **Étude de l'invariance** : la symétrie de la distribution est cylindrique donc on a une invariance par rotation autour de l'axe  $OZ$  alors le champ magnétique ne dépend pas de  $\theta$ . D'autre part, la bobine est infinie ce qui donne une invariance par translation le long de  $OZ$  donc le champ magnétique ne dépend pas de  $z$ . Alors :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z = B(r) \vec{e}_z$$

1.4) En régime statique dans le vide, les équations de Maxwell devient :

$$\text{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

1.5) D'après l'équation de Maxwell-Ampère dans le cas statique, on a :

$$\text{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow -\frac{dB(r)}{dr} \vec{e}_\theta = \mu_0 \vec{j}$$

Loin de la surface de la bobine, la densité du courant  $\vec{j}$  est nulle donc :

$$\frac{dB(r)}{dr} = 0$$

Le champ magnétique ne dépend pas alors de  $r$  donc il est uniforme. D'après la question 1.2, le champ magnétique créée par la bobine infinie (car les effets de bord sont négligeables) est :

$$\vec{B}_{so}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

Donc le champ magnétique en tout point  $M$  à l'intérieur de la bobine est donné par :

$$\vec{B}_{int}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

1.6) La relation de passage du champ magnétique s'écrit sous la forme :

$$\vec{B}_{ext}(M) - \vec{B}_{int}(M) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r$$

Donc :

$$\vec{B}_{ext}(M) = \vec{B}_{int}(M) + \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r$$

Or le courant  $I$  peut être vu comme un courant surfacique de densité  $\vec{j}_s$  homogène. En effet, à travers une section de longueur  $l$ , passe un courant d'intensité  $I'$  qui correspond à un nombre  $N$  de courant  $I$  :

$$I' = NI = nlI = \int \vec{j}_s \cdot (dl \vec{e}_\theta) = j_s l \Rightarrow \boxed{\vec{j}_s = nI \vec{e}_\theta}$$

Donc :

$$\vec{B}_{ext}(M) = \mu_0 nI \vec{e}_z + \mu_0 nI \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$$

Alors à l'extérieur de la bobine (c'est-à-dire pour  $r > a$ ), le champ magnétique est nul :

$$\boxed{\vec{B}_{ext}(M) = \vec{0}}$$

## 2. L'ARQS magnétique

2.1) L'approximation du régime quasi-stationnaire, consiste à négliger le courant de déplacement devant le courant de diffusion dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \simeq \mu_0 \vec{j}$$

Cette approximation est valable lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  associée à l'onde électromagnétique est très grande devant la taille caractéristique  $a$  du circuit :

$$\lambda > a \Rightarrow \lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega} \gg a \Rightarrow \boxed{\omega \ll \frac{2\pi c}{a}}$$

2.2) L'expression fournie du champ magnétique dans A.R.Q.S. doit donner l'expression trouvée dans le cas statique pour  $\omega = 0$  donc :

$$\vec{B}(r, t) = B_0 \vec{e}_z = \vec{B}_{int}(M) = \mu_0 n I_0 \vec{e}_z \Rightarrow \boxed{B_0 = \mu_0 n I_0}$$

2.3) D'après l'équation de Maxwell-Faraday, un champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  variable dans le temps génère un champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  qui est a priori variable. Le champ électrique doit vérifier aussi les invariances du champ magnétique donc il dépend de  $r$  et du temps. D'autre part, le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  est un plan "d'anti-symétrie" de la distribution cylindrique donc le champ électrique est perpendiculaire à ce plan alors :

$$\vec{E}(r, t) = E(r, t) \vec{e}_z$$

2.4) D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = B_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Or le rotationnel (NB : donnée manquante) dans ce cas s'écrit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{E}) = \vec{\text{rot}}(E(r, t) \vec{e}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{d(rE(r, t))}{dr} \vec{e}_z$$

Alors :

$$\frac{1}{r} \frac{d(rE(r, t))}{dr} = B_0 \omega \sin(\omega t) \Rightarrow E(r, t) = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t)$$

Donc le champ électrostatique associé au champ magnétique est :

$$\vec{E}(M) = B_0 \frac{r\omega}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

2.5) La densité d'énergie électrique est donnée par :

$$u_e(t) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 = B_0^2 \frac{r^2 \omega^2}{8} \varepsilon_0 \sin^2(\omega t)$$

Sa valeur moyenne est donnée par :

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_e(t) dt = B_0^2 \frac{r^2 \omega^2}{8T} \varepsilon_0 \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = B_0^2 \frac{r^2 \omega^2}{16T} \varepsilon_0 \int_0^T (1 - \cos(2\omega t)) dt$$

Ce qui donne :

$$\langle u_e \rangle = B_0^2 \frac{r^2 \omega^2}{16} \varepsilon_0$$

D'autre part, la densité d'énergie magnétique est :

$$u_m(t) = \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2(\omega t)$$

Alors que la valeur moyenne est donc :

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u_m(t) dt \Rightarrow \langle u_m \rangle = \frac{B_0^2}{4\mu_0}$$

2.6) La contribution électrique par rapport à la contribution magnétique peut être mesurée par l'expression :

$$\frac{\langle u_e \rangle}{\langle u_m \rangle} = \frac{B_0^2 \frac{r^2 \omega^2}{16} \varepsilon_0}{\frac{B_0^2}{4\mu_0}} = \frac{r^2 \omega^2}{4} \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{r^2 \omega^2}{4c^2} \ll \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \sim 1 \quad \text{car : } \frac{\omega}{c} \ll \frac{2\pi}{a}$$

Donc la contribution électrique est très faible devant la contribution magnétique :

$$\langle u_e \rangle \ll \langle u_m \rangle$$

2.7) On a :

$$\vec{B}(r, t) = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(r, t) = \mu_0 n I_0 \frac{r\omega}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{E}(r, t) = -\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{di(t)}{dt} \vec{e}_\theta$$

Le vecteur de Poynting est par définition :

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = -\mu_0 n^2 \frac{r}{2} i(t) \frac{di(t)}{dt} \vec{e}_r$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$\vec{\Pi}(M, t) = -\frac{\mu_0 n^2 r}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} i^2(t) \right) \vec{e}_r$$

2.8) La puissance rayonnée à travers la surface qui limite la portion de la bobine ( $r = a$ ) de longueur  $l$  est :

$$\mathcal{P}_{ray} = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \int_0^l \int_0^{2\pi} -\frac{\mu_0 n^2 r}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} i^2(t) \right) r d\theta dz$$

$$\mathcal{P}_{ray} = -\mu_0 n^2 a^2 \pi l \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} i^2(t) \right)$$

D'autre part, l'énergie magnétique contenue dans la portion de la bobine de longueur  $l$  est :

$$U_m = \iiint \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 d\tau = \iiint \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 i^2(t) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \mu_0^2 n^2 i^2(t) \int_0^l dz \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow U_m \simeq \frac{1}{2} \mu_0 n^2 i^2(t) \pi a^2 l$$

On remarque que :

$$\frac{dU_m}{dt} \simeq \mu_0 n^2 a^2 \pi l \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} i^2(t) \right) = -\mathcal{P}_{ray}$$

2.9) L'équation de conservation d'énergie est donnée par :

$$\frac{du_{em}}{dt} = -div(\vec{\Pi}) - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Dans notre cas, on n'a pas de courant volumique dans  $\vec{j} = \vec{0}$  alors :

$$\frac{du_{em}}{dt} = -div(\vec{\Pi})$$

Or la densité d'énergie électromagnétique est donnée par :

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2$$

La contribution électrique est négligeable devant la partie magnétique donc :

$$u_{em} \simeq \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2 = \frac{\mu_0 n^2}{2} i^2(t)$$

D'autre part :

$$div(\vec{\Pi}) = -div\left(\frac{\mu_0 n^2 r}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i^2(t)\right) \vec{e}_r\right) = -\frac{\mu_0 n^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} i^2(t)\right) div(r \vec{e}_r)$$

Or :

$$div(r \vec{e}_r) = \frac{1}{r} \frac{dr^2}{dr} = 2$$

Alors :

$$div(\vec{\Pi}) = -\frac{\mu_0 n^2}{2} \frac{d}{dt} (i^2(t))$$

Donc :

$$div(\vec{\Pi}) = -\frac{\partial u_{em}}{\partial t}$$

Les expressions trouvées dans les questions précédentes vérifient alors l'équation locale de conservation d'énergie électromagnétique.

### 3. Caractéristiques d'une bobine

#### 3.1. Self inductance

3.1.1) Le flux du champ magnétique à travers l'ensemble des  $N$  spires de la bobine est donné par :

$$\Phi = N \int_{\text{spire}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_0^{2\pi} \int_0^a \mu_0 n i(t) r dr d\theta = \mu_0 n N i(t) \pi a^2$$

Or  $N = n.l$  donc :

$$\Phi = \mu_0 n^2 l \pi a^2 i(t)$$

3.1.2) Par définition, le coefficient d'auto-inductance est donnée par :

$$\Phi(t) = L i(t) \Rightarrow L = \frac{\Phi}{i(t)}$$

Donc :

$$L = \mu_0 n^2 a^2 \pi l$$

#### 3.2. Résistance interne

3.2.1) D'après la loi d'Ohm généralisée :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{j}{\gamma} \vec{e}_z$$

Or l'intensité du courant  $I$  est définie comme étant le flux de la densité volumique du courant le long du cylindre :

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} j r d\varphi dr = j \pi \frac{d^2}{4} \Rightarrow j = \frac{4I}{\pi d^2}$$

Alors le champ électrique au sein du conducteur est donné par :

$$\vec{E} = \frac{4I}{\pi d^2 \gamma} \vec{e}_z$$

3.2.2) La tension entre les bornes du fil conducteur est donnée par :

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{OM} = \int_0^{l'} E dz = E l'$$

Alors :

$$U = \frac{4I l'}{\pi d^2 \gamma}$$

3.2.3) La résistance électrique du fil conducteur peut être déduite à partir de la loi d'Ohm intégrale :

$$r = \frac{U}{I} \Rightarrow r = \frac{4l'}{\pi d^2 \gamma}$$

3.2.4) La longueur  $l'$  de l'enroulement correspond pratiquement à  $N$  fois le périmètre d'une spire donc :

$$l' = 2\pi a N \quad \text{Alors :} \quad r = \frac{8a N}{d^2 \gamma}$$



#### 4. Mesure de l'impédance d'une bobine

4.1) Par analyse dimensionnelle, on montre que  $k$  s'exprime en  $V^{-1}$ .

4.2) La relation liant l'intensité  $i$  du courant traversant une bobine avec la différence de potentiel  $u$  entre ces bornes est :

$$u = L \frac{di}{dt} + ri$$

En notation complexe, cette relation devient :

$$\underline{u} = L \frac{d\underline{i}}{dt} + r\underline{i} = (jL\omega + r)\underline{i}$$

Donc l'impédance associée à la bobine est :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = jL\omega + r$$

4.3) L'impédance d'entrée du multiplieur est infinie donc les dipôles  $R_0$  et  $\underline{Z}$  sont en série. Alors :

$$\underline{u}_1(t) = \underline{Z}\underline{i} = (jL\omega + r) I_0 \exp(j\omega t) \quad \text{et} \quad \underline{u}_2(t) = R_0 \underline{i} = R_0 I_0 \exp(j\omega t)$$

En notation réelle, on obtient :

$$u_1(t) = I_0 \sqrt{L^2\omega^2 + r^2} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right)$$

$$\text{et} \quad u_2(t) = R_0 I_0 \cos(\omega t)$$

4.4) Par définition :

$$u_3(t) = k u_1(t) u_2(t) = k R I_0^2 \sqrt{L^2\omega^2 + r^2} \cos(\omega t) \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right)$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme :

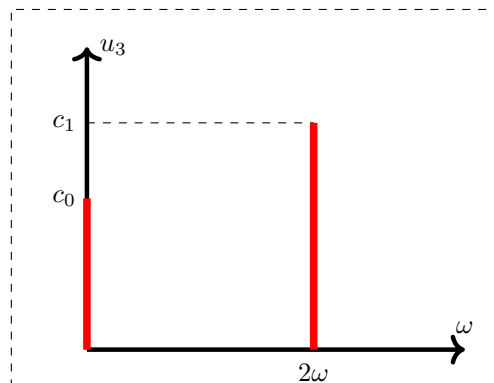
$$u_3(t) = \frac{1}{2} k R I_0^2 \sqrt{L^2\omega^2 + r^2} \left[ \cos\left(\arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right) + \cos\left(2\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right) \right]$$

Le spectre correspondant contient alors deux pics le premier correspond à la composante continue (d'amplitude  $c_0$ ) et le deuxième correspond à la pulsation  $2\omega$  et dont l'amplitude est  $c_1$ . Alors :

$$c_0 = \frac{1}{2} k R I_0^2 r \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{1}{2} k R I_0^2 \sqrt{L^2\omega^2 + r^2}$$

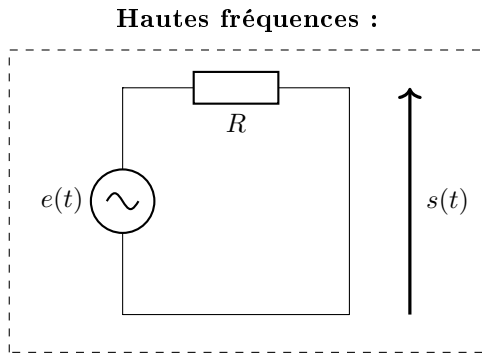
Car :

$$\cos\left(\arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2\omega^2}{r^2}}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2\omega^2}}$$



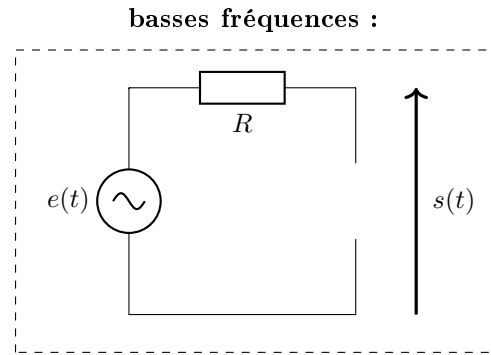
Spectre de la tension  $u_3$

4.5) L'analyse du circuit donne :



**Alors :**  $s(t) = 0$

Alors c'est un filtre passe bas.



$e(t) = Ri(t) + s(t)$  **Alors :**  $s(t) = e(t)$

4.6) La résistance  $R$  et le condensateur sont en série donc en appliquant la loi du diviseur de tension, on trouve que :

$$u_4 = \frac{Z_c}{Z_c + R} u_3 \Rightarrow \underline{H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$$

On remarque que en hautes fréquences ( $\omega \mapsto +\infty$ ), la fonction du transfert devient nulle alors qu'en basses fréquences ( $\omega \mapsto 0$ ) la fonction de transfert tend vers l'unité ce qui confirme que le circuit est un filtre passe bas.

4.7) La pulsation de coupure est définie par :

$$|H|(\omega_c) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$

Or pour ce circuit  $H_{max} = 1$  (limite lorsque  $\omega \mapsto 0$  car c'est un passe bas). Alors :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

4.8) D'après le spectre vue précédemment, la tension  $u_3(t)$  contient deux composantes une constante et une alternative de pulsation  $2\omega$ . Alors à la sortie de filtre passe bas, on peut obtenir une tension constante si on choisit  $\omega_c$  (et donc  $R$  et/ou  $C$ ) de telle sorte que :

$$\underline{0 \ll \omega_c = \frac{1}{RC} \ll 2\omega}$$

Dans ce cas la tension à la sortie est donnée par :

$$u_4 = \frac{1}{2} k R I_0^2 r \quad \text{Donc :} \quad \underline{r = \frac{2u_4}{k R I_0}}$$

Donc la mesure de la valeur de  $u_4$  connaissant  $R$ ,  $k$  et  $I_0$  permet de déterminer  $r$ .

4.9) En remplaçant  $R_0$  par  $C_0$ , on obtient :

$$i(t) = C \frac{du_1(t)}{dt} \Rightarrow u_1(t) = \int \frac{i(t)}{C} dt = \frac{I_0}{C} \int \cos(\omega t) dt$$

Alors :

$$\underline{u_1(t) = \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t)}$$

**N.B :** on peut utiliser aussi la notation complexe pour retrouver se résultat.

4.10) Par définition :

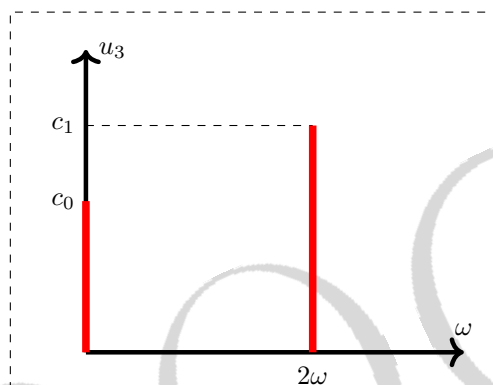
$$u_3(t) = \frac{kRI_0^2 \sqrt{L^2 \omega^2 + r^2}}{C\omega} \sin(\omega t) \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right)$$

Ce qu'on peut écrire sous la forme :

$$u_3(t) = \frac{kRI_0^2 \sqrt{L^2 \omega^2 + r^2}}{2C\omega} \left( \sin\left(2\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right) + \sin\left(\arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right) \right)$$

Le spectre correspondant contient alors deux pics le premier correspond à la composante continue (d'amplitude  $c_0$ ) et le deuxième correspond à la pulsation  $2\omega$  et dont l'amplitude est  $c_1$ . Alors :

$$c_0 = \frac{kRI_0^2 L}{2C} \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{kRI_0^2 \sqrt{L^2 \omega^2 + r^2}}{2C\omega}$$



Spectre de la tension  $u_3$

4.11) De même façon que la question 4.8, la filtre  $RC$  permet d'éliminer la composante de pulsation  $2\omega$  si la pulsation de résonance  $\omega_c$  vérifie la même condition vue précédemment :

$$0 \ll \omega_c = \frac{1}{RC} \ll 2\omega$$

Dans ce cas, la tension  $u_4$  devient :

$$u_4 = \frac{kRI_0^2 L}{2C} \Rightarrow L = \frac{2u_4 C}{kRI_0^2}$$