

CORRIGÉ DE PHYSIQUE 2 PSI

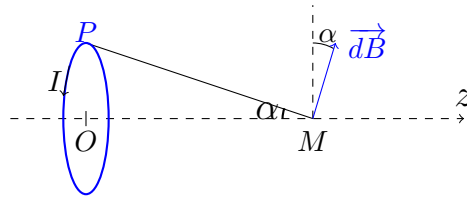
CNC 2022

Partie 1 : Champ magnétique d'une spire circulaire

1. Tout plans diamétral est un plan d'anti-symétrie pour la distribution de courant donc plans de symétrie pour le vecteur axial $\vec{B}_{sp}(M)$

Donc $\vec{B}_{sp}(M)$ appartient à l'intersection de ces plans : $\vec{B}_{sp}(M) = B_{sp}(M)\vec{e}_z$.

2. $d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{OP}}{PM^3} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM}$ avec $d\vec{OP} = R d\theta \vec{e}_\theta$ et $\vec{PM} = (z\vec{e}_z - a\vec{e}_r) \perp d\vec{OP}$



Donc $\|d\vec{B}_{sp}\| = \frac{\mu_0 I a d\theta}{4\pi P M^2}$, $dB_z = d\vec{B}_{sp} \cdot \vec{e}_z = dB_{sp} \sin \alpha$

Soit : $dB_z = \frac{\mu_0 I a d\theta}{4\pi P M^2} \sin \alpha \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi P M^2} (\sin \alpha) a \int_0^{2\pi} d\theta$

D'où : $B_z = \frac{\mu_0 I a \times 2\pi}{4\pi P M^2} \sin \alpha = \frac{\mu_0 I a \sin \alpha}{2 P M^2}$

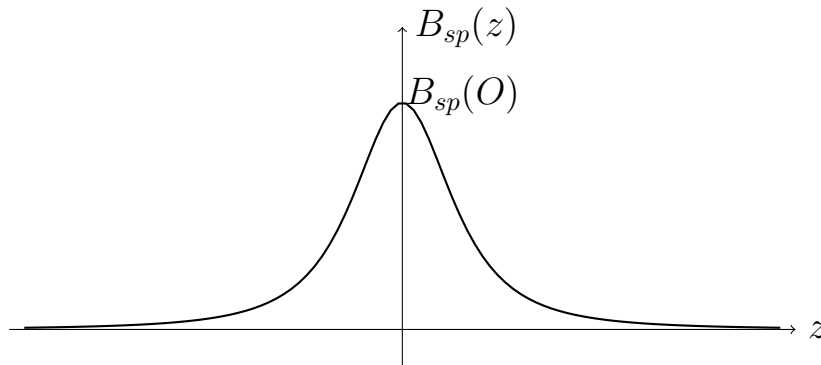
Avec $\sin \alpha = \frac{a}{PM} \Rightarrow \frac{1}{PM^2} = \left(\frac{\sin \alpha}{a}\right)^2$

On obtient

$$\boxed{\vec{B}_{sp}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^3 \alpha \vec{e}_z}$$

Au centre de la spire $\alpha = \frac{\pi}{2}$, donc $\boxed{B_{sp}(O) = \frac{\mu_0 I}{2a}}$

3. On a $\sin \alpha = \frac{a}{PM} = \frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}$. Donc $\boxed{B_{sp}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \left(\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}$



4. $B_{sp}(O) = \frac{\mu_0 I}{2a}$, AN : $B_{sp}(O) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1}{2 \times 5 \times 10^{-2}}$,

$B_{sp}(O) = 1,26 \times 10^{-5} T$, soit $\boxed{B_{sp}(O) = 10^{-5} T}$

$$I = \frac{2aB_{sp}(O)}{\mu_0}, \text{ AN : } I = \frac{2 \times 5 \times 10^{-2} \times 1}{4\pi \times 10^{-7}}, I = 7,9 \times 10^4 \text{ A}$$

Ou encore

$$\boxed{I = 8 \times 10^4 \text{ A}}$$

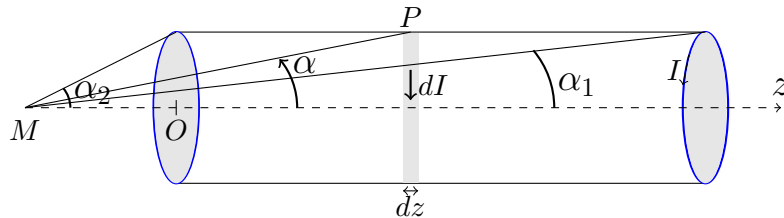
Intensité électrique très forte! irréalisable en l'absence d'un système de refroidissement.

Pour obtenir un champ magnétique intense on peut utiliser :

- un aimant, ou
- une bobine, formée à partir d'un supraconducteur, parcourue par un courant intense.

Partie 2 : Modélisation d'une bobine

1. Champ magnétique créé par une bobine infinie



1.1. La tranche dz parcourue par le courant $dI = Indz$ crée en M un champ magnétique élémentaire $d\vec{B}_{so}(M) = \frac{\mu_0 dI}{2a} \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 Indz}{2a} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$

$$\text{Or : } \cotan \alpha = \frac{z-z_M}{a} \Rightarrow dz = -a \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$\text{Donc : } d\vec{B}_{so}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2a} (-a \sin \alpha d\alpha) \vec{e}_z$$

$$\text{D'où : } \vec{B}_{so}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} -\sin \alpha d\alpha) \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \alpha]_{\alpha_2}^{\alpha_1} \vec{e}_z$$

Ou encore

$$\boxed{\vec{B}_{so}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z}$$

1.2. Pour une bobine de longueur infinie ($l \gg a$) : $\alpha_1 \rightarrow 0$ et $\alpha_2 \rightarrow \pi$:

$$\boxed{\vec{B}_{so}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

1.3. • Le plan $\Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ étant un plan de symétrie pour la distribution de courant, il est aussi un plan d'antisymétrie pour le pseudo-vecteur \vec{B} , donc $\vec{B} \perp \Pi(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, d'où $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$.

• La distribution de courant est invariante par rotation de θ autour de (Oz) et par translation selon l'axe (Oz) , de même pour le champ $\vec{B}(M)$, donc le champ magnétique ne dépend ni de θ ni de z , il ne dépend que de r .

D'où :
$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z}$$

1.4. Équations de MAXWELL en régime stationnaire :

$$M\phi : \operatorname{div} \vec{B}(M) = 0; \quad MF : \operatorname{rot} \vec{E}(M) = 0$$

$$MG : \operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\epsilon_0}; \quad MA : \operatorname{rot} \vec{B}(M) = \mu_0 \vec{j}(M)$$

1.5. Pour $r < a$ $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{dB}{dr}\vec{e}_r = \vec{0}$, donc le champ magnétique est uniforme à l'intérieur de la bobine infinie.

De même pour $r > a$.

Pour $r < a$:
$$\boxed{\vec{B}(r) = \vec{B}(r=0) = \mu_0 n I \vec{e}_z}$$

Remarque : Le champ magnétique n'est pas défini en $r = a$, il y subit une discontinuité à cause de modèle surfacique de la distribution de courant sur la surface latérale de la bobine.

1.6. Relation de passage Pour \vec{B} :

$$\vec{B}(r = a^+) - \vec{B}(r = a^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{e}_r \text{ avec } \vec{j}_s = j_s \vec{e}_\theta$$

$$\text{Or : } dI = n I dz = j_s dz \Rightarrow \vec{j}_s = n I \vec{e}_\theta$$

$$\text{D'où : } \vec{B}(r = a^+) = \vec{B}(r = a^-) + \mu_0 n I \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r$$

$$\text{Soit } \vec{B}(r = a^+) = \mu_0 n I \vec{e}_z - \mu_0 n I \vec{e}_z = \vec{0}.$$

Puisque \vec{B} est uniforme, alors
$$\boxed{\vec{B}(r > a) = \vec{B}(r = a^+) = \vec{0}}$$
 : le champ magnétique est nul à l'extérieur d'une bobine de longueur infinie.

2. L'ARQS magnétique

2.1. L'approximation des régimes quasi-stationnaire consiste à négliger le phénomène de propagation. On néglige alors le retard τ dû à la propagation devant la durée T caractéristique de l'évolution des sources. Dans ce cas l'ARQS est valable si $\tau = \frac{a}{c} \ll T = \frac{2\pi}{\omega}$, ou encore si
$$\boxed{\frac{\omega a}{2c} \ll \pi}$$

2.2.
$$\boxed{B_0 = \mu_0 n I_0}$$

2.3. Selon l'équation MF : $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, un champ magnétique $\vec{B}(t)$ dépendant du temps crée un champ électrique \vec{E} .

La plan $(M, \vec{e}_z, \vec{e}_r)$ est un plan de symétrie pour l'ensemble $\{\vec{B}, \text{bobine}\}$, donc plan d'anti-symétrie pour le vecteur polaire \vec{E} ($\vec{E} \perp$ à ce plan) :

$$\vec{E}(M, t) = E(M, t)\vec{e}_\theta.$$

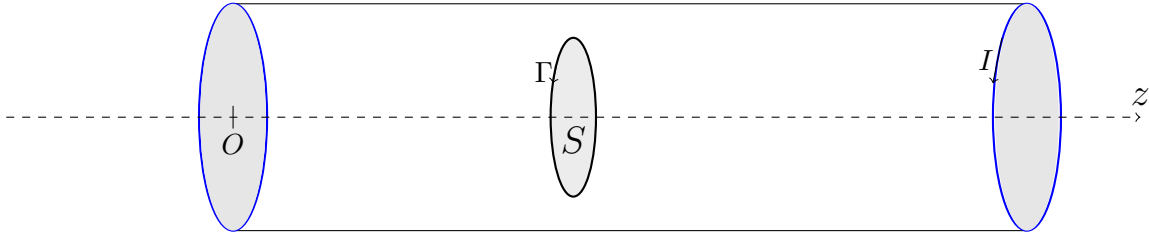
L'ensemble précédent est invariant par rotation de θ autour de (Oz) et par translation selon l'axe (Oz) , donc de même pour \vec{E} . D'où \vec{E} ne dépend que de r et du temps :
$$\boxed{\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{e}_\theta}$$

2.4. L'écriture intégrale de MF traduit la loi de FARADAY :

$$\oint_{M \in \Gamma} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{l} = \iint_{P \in S} \text{rot} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S} \right)$$

S étant une surface qui s'appuie sur le contour fermé Γ .

$\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{e}_\theta$, donc on choisit comme contour fermé Γ , un cercle d'axe (Oz) et de rayon r .



Pour $r < a$: $E(r, t) \times 2\pi r = -\frac{dB}{dt} \times \pi r^2 \Rightarrow \vec{E}(M, t) = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{e}_\theta$

Donc
$$\vec{E}(M, t) = \frac{r\omega B_0}{2} \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

2.5. $u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{8}\varepsilon_0 \omega^2 r^2 B_0^2 \sin^2(\omega t)$; $u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \cos^2(\omega t)$

$$\langle u_e \rangle = \frac{1}{16}\varepsilon_0 \omega^2 r^2 B_0^2 \quad \text{et} \quad \langle u_m \rangle = \frac{B_0^2}{4\mu_0}$$

2.6. $\frac{\langle u_e \rangle}{\langle u_m \rangle} = \frac{1}{4}\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 r^2 = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \Rightarrow \frac{\langle u_e \rangle}{\langle u_m \rangle} = \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \leq \left(\frac{\omega a}{2c}\right)^2$

D'après la question **2.1.**, dans le cadre de l'ARQS : $\frac{\omega a}{2c} \ll \pi$ ou encore $\frac{\omega a}{2c} \leq 0,3 \Rightarrow \left(\frac{\omega a}{2c}\right)^2 \leq 9 \cdot 10^{-2} \ll 1$.

Donc dans le cadre de l'ARQS : $\frac{\langle u_e \rangle}{\langle u_m \rangle} \ll 1$: dans ce cas l'essentiel de l'énergie électromagnétique dans la bobine est sous forme magnétique.

2.7. $\vec{B}(r, t) = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z = B \vec{e}_z$ avec $B = \mu_0 n i(t)$

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{e}_\theta = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{\pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{r}{2\mu_0} B \frac{dB}{dt} \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z \Rightarrow \vec{\pi} = -\frac{r}{2\mu_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{2}\right) \vec{e}_r = -\frac{r}{2\mu_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{(\mu_0 n i)^2}{2}\right) \vec{e}_r$$

D'où
$$\vec{\pi} = -\frac{\mu_0 r n^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{i^2}{2}\right) \vec{e}_r$$

2.8. La puissance électromagnétique rayonnée à travers la portion de la bobine de longueur l :

$$P_{ray} = \iint_{S_L} \vec{\pi}(a, t) \cdot d\vec{S}_L = -\frac{a}{2\mu_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{2}\right) \times 2\pi a l = \frac{d}{dt} (\pi a^2 l \frac{B^2}{2\mu_0})$$

Donc $P_{ray} = -\frac{dE_m}{dt}$ avec $E_m = \pi a^2 l \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} L i^2$ est l'énergie magnétique stockée dans la portion de la bobine de longueur l .

Ou encore $P_{ray} = \iint_{S_L} \vec{\pi}(a, t) \cdot d\vec{S}_L = -\frac{\mu_0 a n^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{i^2}{2}\right) \times 2\pi a l = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mu_0 n^2 \pi a^2 l i^2\right)$

Soit $P_{ray} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2\right) = -\frac{dE_m}{dt}$

2.9. Considérons l'énergie électromagnétique située entre deux cylindres de longueur l et de rayons r et $r + dr$.

$$E_m(t + dt) = E_m(t) - dP_{ray}dt$$

$$\text{Donc } E_m(t + dt) - E_m(t) = \pi(r)2\pi r l dt - \pi(r + dr)2\pi(r + dr)l dt$$

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)2\pi r l dr = -2\pi l \frac{d}{dr}(r\pi)dr$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right)r = -\mu_0 r n^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{i^2}{2}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\right) = \mu_0 n^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{i^2}{2}\right)$$

$$\text{Ou encore } \frac{d}{dt}\left(\frac{B^2}{2\mu_0}\pi a^2 l\right) = \frac{d}{dt}\left(\mu_0 \pi a^2 l n^2 \frac{i^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$$

$$\text{Soit } \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = -P_{ray}.$$

On peut aussi partir directement de l'équation locale de la conservation de l'énergie électromagnétique dans la bobine dans le cadre de l'ARQS :

$$\text{div } \vec{\pi} + \frac{\partial u_m}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \text{ avec } \vec{j} = \vec{0} \text{ à l'intérieur de la bobine.}$$

$$\iiint_{\text{Bobine}} \text{div } \vec{\pi} d\tau = -\iiint_{\text{Bobine}} \frac{\partial u_m}{\partial t} d\tau, \text{ le théorème de GREEN-OSTROGRADSKI permet d'écrire : } P_{ray} = \iint_{S_L} \vec{\pi}(a, t) \cdot d\vec{S}_L = -\frac{dE_m}{dt}$$

3. Caractéristiques d'une bobine

3.1. Self inductance

$$3.1.1. \phi = NB\pi a^2 = \mu_0 n N \pi a^2 i$$

$$3.1.2. \phi = Li = \mu_0 n N \pi a^2 i \Rightarrow L = \mu_0 n N \pi a^2 \text{ avec } N = nl$$

$$\text{On obtient } \boxed{L = \mu_0 n^2 \pi a^2 l}$$

3.2. Résistance interne

$$3.2.1. I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = j\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow j = \frac{4I}{\pi d^2}, \text{ donc } \boxed{\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{4I}{\gamma \pi d^2} \vec{e}_z}$$

$$3.2.2. \boxed{U = El' = \frac{4l'}{\gamma \pi d^2} I}$$

$$3.2.3. U = rI = \frac{4l'}{\gamma \pi d^2} I \Rightarrow \boxed{r = \frac{4l'}{\gamma \pi d^2}}$$

$$3.2.4. \boxed{l' = N \times 2\pi a} \Rightarrow r = \frac{4 \times 2\pi a N}{\gamma \pi d^2}, \text{ d'où } \boxed{r = \frac{8Na}{\gamma d^2}}$$

4. Mesure de l'impédance d'une bobine

$$4.1. u_3 = ku_1u_2 \Rightarrow k \text{ s'exprime en } V^{-1}$$

$$4.2. \underline{Z} = r + jL\omega$$

$$4.3. \boxed{u_1(t) = R_0 i = R_0 I_0 \cos(\omega t)}; \underline{u}_2 = \underline{Z}i \Rightarrow u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\text{Avec } U_2 = ZI_0 = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}I_0 \text{ et } \varphi_2 = \arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)$$

$$\text{Donc } \boxed{u_2(t) = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2}I_0 \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{L\omega}{r}\right)\right)}$$

Remarque : $u_2(t) = ri + L\frac{di}{dt} = rI_0 \cos(\omega t) - L\omega I_0 \sin(\omega t)$

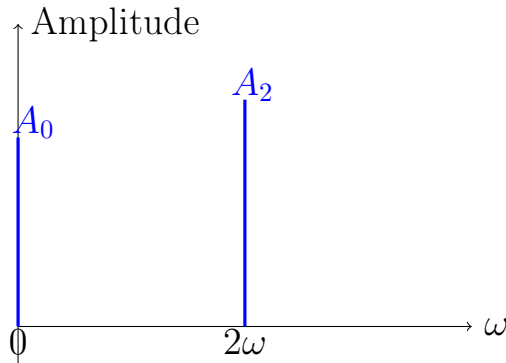
$$4.4. u_3(t) = ku_1u_2 = kR_0I_0U_2 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$u_3(t) = \frac{kR_0 I_0 U_2}{2} \cos \varphi_2 + \frac{kR_0 I_0 U_2}{2} \cos(2\omega t + \varphi_2)$$

Avec $U_2 = Z I_0$ et $\cos \varphi_2 = \frac{r}{Z}$

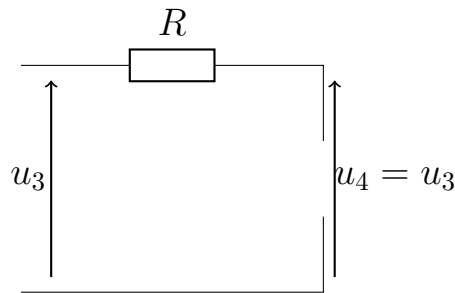
On obtient :
$$u_3(t) = \frac{krR_0 I_0^2}{2} + \frac{k\sqrt{r^2 + (L\omega)^2} R_0 I_0^2}{2} \cos(2\omega t + \varphi_2)$$

Ou encore $u_3(t) = A_0 + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2)$



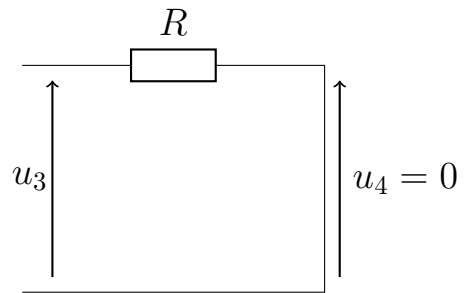
4.5.

En BF : $Z_c = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$:



Tout le signal est transmis en BF

En HF : $Z_c = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$:



Rien n'est transmis en HF

On a le comportement d'un filtre passe bas.

4.6. $\underline{H} = \frac{u_4}{u_3} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$ et $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(\omega) = 0$: rien n'est transmis en HF

$G(\omega = 0) = 1 = G_{max}$: tout le signal est transmis en BF

On a bien un filtre passe bas de 1^{er} ordre

4.7. La pulsation de coupure à $-3dB$ est définie par :

$$G(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow RC\omega_c = 1$$

D'où

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

4.8. $u_s = u_4$ est quasiment constante si le filtre élimine l'harmonique de pulsation $2\omega \gg \omega_c$, ce qui est réalisable lorsque $2RC\omega \gg 1$, on peut aussi choisir $RC\omega \gg 1$.

Dans ce cas $U_4 = \underline{H}(\omega = 0) \times \frac{krR_0I_0^2}{2} = \frac{krR_0I_0^2}{2}$. On choisit $RC \gg \frac{1}{\omega}$ et on mesure la tension de sortie U_4 , on obtient : $r = \frac{2U_4}{kR_0I_0^2}$

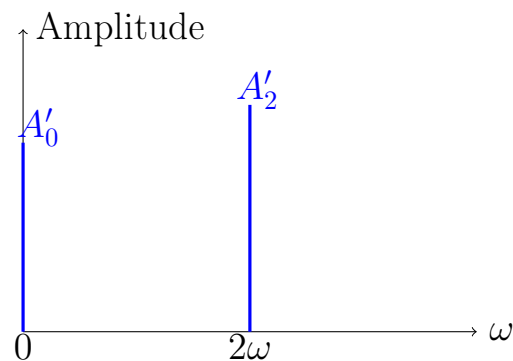
4.9. $u_1 = \frac{1}{C_0} \int i(t)dt = \frac{I_0}{C_0\omega} \sin(\omega t)$

4.10. $u_3 = ku_1u_2 = \frac{kI_0U_2}{C_0\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t + \varphi_2)$

$u_3 = \frac{kI_0U_2}{2C_0\omega} [-\sin \varphi_2 + \sin(2\omega t + \varphi_2)]$ avec $\sin \varphi_2 = \frac{L\omega}{Z}$ et $U_2 = ZI_0$

On obtient $u_3 = -\frac{kI_0^2L}{2C_0} + \frac{kI_0^2\sqrt{r^2+(L\omega)^2}}{2C_0\omega} \sin(2\omega t + \varphi_2)$

Ou encore $u_3 = -A'_0 + A'_2 \sin(2\omega t + \varphi_2)$



4.11. Pour $RC\omega \gg 1$, l'harmonique de pulsation 2ω est éliminée, , seule la composante continue qui est transmise.

On obtient : $u_4 = \underline{H}(\omega = 0) \times (-\frac{kI_0^2L}{2C_0})$.

Soit $u_4 = -\frac{kI_0^2L}{2C_0}$, on en déduit $L = \frac{2C_0|u_4|}{kI_0^2}$