

Correction de l'épreuve de PHYSIQUE II filière TSI

Concours CNC session 2025

EL FILALI SAID

QUELQUES PROPRIÉTÉS THERMODYNAMIQUES DE L'EAU

1^{ère} partie

La compressibilité de l'eau de mer

1- Eau incompressible ($\rho = \rho_0 = 1,025 \times 10^3 \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)

1.1- Démonstration de $P(z) = P_0 + \rho_0 g z$

L'équation fondamentale de la statique des fluides est :

$$-\vec{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g} = \vec{0}$$

Avec l'axe Oz descendant, $\vec{g} = g\vec{e}_z$ ($g > 0$). La pression ne dépend que de z , donc :

$$\frac{dP}{dz} = \rho g$$

Pour un fluide incompressible, $\rho = \rho_0 = \text{constante}$. Intégration entre $z = 0$ ($P = P_0$) et z :

$$\int_{P_0}^{P(z)} dP = \int_0^z \rho_0 g dz$$

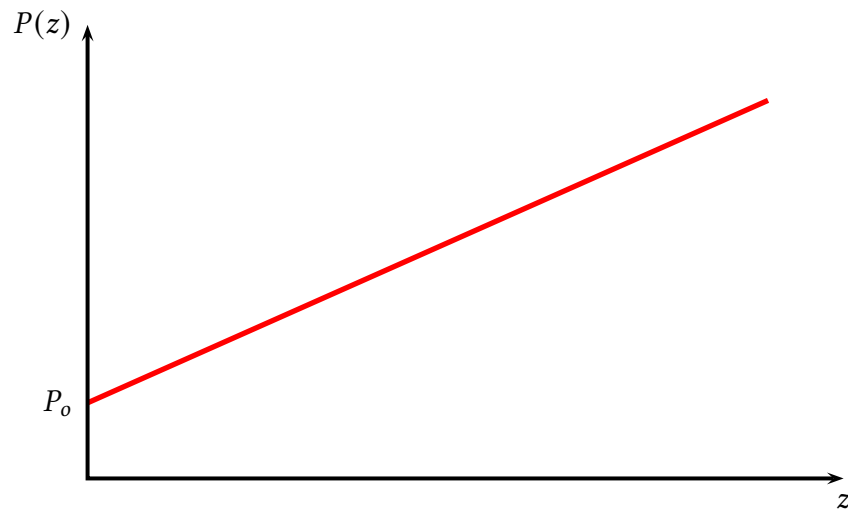
$$P(z) - P_0 = \rho_0 g z$$

$$P(z) = P_0 + \rho_0 g z$$

1.2- Représentation graphique :

La fonction $P(z)$ est une droite affine de pente $\rho_0 g$ et d'ordonnée à l'origine $P_0 = 1\text{bar}$.

Allure : Droite croissante dans le plan (z, P) .



1.3- Valeur numérique de la pente et validation de la règle des plongeurs :

• **Pente :**

$$\rho_0 g = 0,1005525 \text{ bar m}^{-1}$$

• Pour $z = 10 \text{ m}$:

$$P \approx 1 \text{ bar}$$

Conclusion:

La règle des plongeurs "1 bar tous les 10 mètres" est valable.

2- Eau compressible ($\rho = \rho_0 [1 + a(P - P_0)]$ avec $a = 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$)

2.1- Loi de variation de $P(z)$

L'équation de la statique :

$$\frac{dP}{dz} = \rho g = \rho_0 g [1 + a(P - P_0)]$$

Posons $u = P - P_0$, alors :

$$\frac{du}{dz} = \rho_0 g (1 + au)$$

Séparation des variables :

$$\int_0^u \frac{du'}{1 + au'} = \int_0^z \rho_0 g dz'$$

$$\frac{1}{a} \ln(1 + au) = \rho_0 g z$$

$$1 + au = e^{a\rho_0 g z}$$

$$u = \frac{e^{a\rho_0 g z} - 1}{a}$$

$$P(z) = P_0 + \frac{1}{a} (e^{a\rho_0 g z} - 1)$$

2.2- Comportement aux faibles profondeurs

Pour z petit ($a\rho_0gz \ll 1$), utilisation de $e^x \approx 1 + x$:

$$P(z) \approx P_0 + \frac{(1 + a\rho_0gz) - 1}{a} \implies P(z) = P_0 + \rho_0gz$$

Conclusion:

Aux faibles profondeurs, la loi se réduit à celle du fluide incompressible. La compressibilité est négligeable.

2.3- Calculs des pressions et erreur relative

Données numériques :

- $P_0 = 1\text{bar} = 1,013 \times 10^5\text{Pa}$
- $\rho_0 = 1,025 \times 10^3\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $g = 9,81\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$
- $a = 10^{-10}\text{Pa}^{-1}$

◆ Tableau des valeurs

Profondeur	P_{inc} (Pa)	P_{inc} (bar)	P_c (Pa)	P_c (bar)
$z_1 = 10\text{m}$	201 852, 5	1, 993	201 852, 5	1, 993
$z_2 = 100\text{m}$	1 106 825	10, 930	1 106 825	10, 930
$z_3 = 1000\text{m}$	10 156 550	100, 262	10 161 604	100, 316

◆ Erreur relative pour $z_3 = 1000\text{ m}$:

$$\text{Erreur} = \left| \frac{P_c - P_{\text{inc}}}{P_c} \right| \times 100 = \left| \frac{10\,161\,604 - 10\,156\,550}{10\,161\,604} \right| \times 100 \implies \text{Erreur} \approx 0,05\%$$

Conclusion:

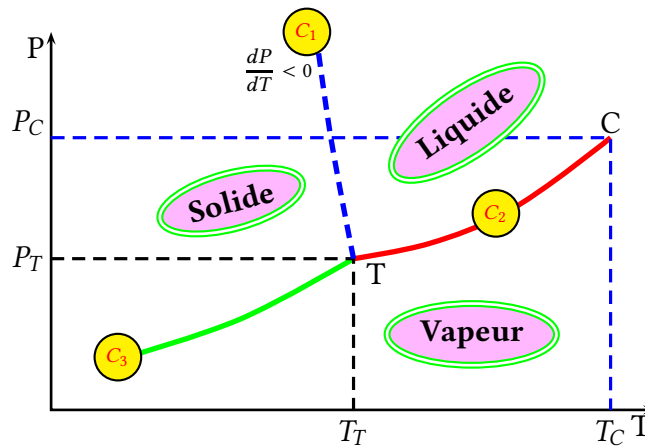
- **Jusqu'à 100 m, les modèles coïncident (erreur négligeable).**
- **À 1000 m, l'erreur est faible (0,05%) mais notable pour des applications précises. L'approximation incompressible reste valide pour la plupart des usages courants.**

2^{ème} partie

2.1 Diagramme d'état de l'eau

1.1 Diagramme d'état et courbes caractéristiques

Le diagramme d'état de l'eau en coordonnées (P, T) présente trois courbes caractéristiques :

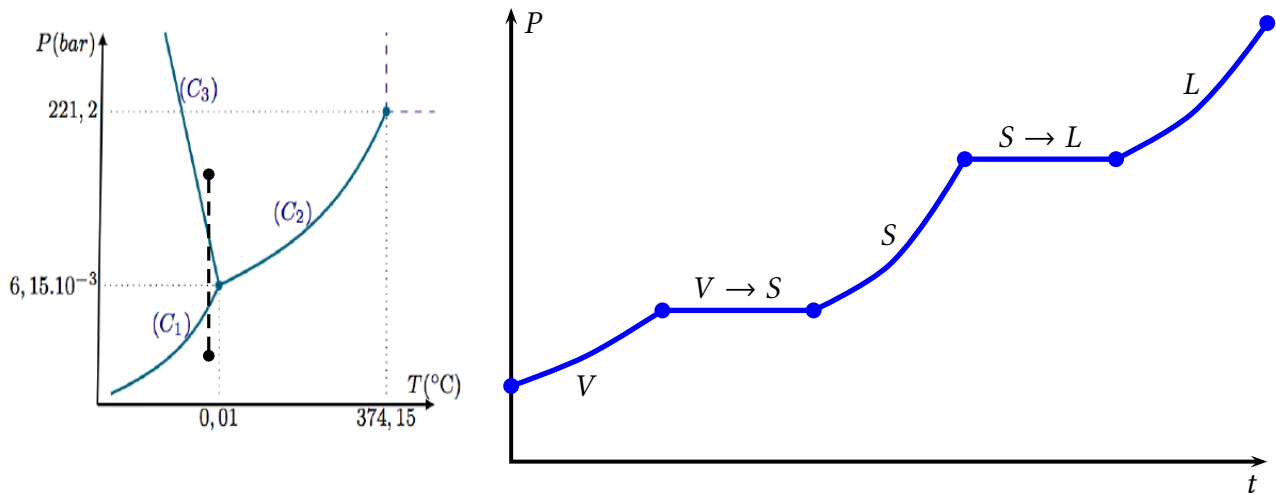


- **Courbe (C₁)** : Courbe de fusion (équilibre solide-liquide)
- **Courbe (C₂)** : Courbe de vaporisation (équilibre liquide-vapeur)
- **Courbe (C₃)** : Courbe de sublimation (équilibre solide-vapeur)

1.2 Points caractéristiques

- **Point triple** : Point de coexistence des trois phases (solide, liquide, vapeur) en équilibre thermodynamique.
- **Point critique** : Point au-delà duquel la distinction entre liquide et vapeur disparaît (fluide supercritique). La chaleur latente de vaporisation s'annule.

1.3 Compression isotherme



Phénomènes observés (T_i = 0°C, P_i = 5 × 10⁻³ bar → P_f = 2 bar) :

- 1 Palier 1** (Sublimation) : Transition directe vapeur → solide à P ≈ 6.1 × 10⁻³ bar
- 2 Compression du solide** : Augmentation progressive de la pression
- 3 Palier 2** (Fusion) : Transition solide → liquide à P ≈ 1 kbar

1.4 Calcul de l'enthalpie massique de fusion

Bilan thermique (système isolé, pression constante) :

$$Q_{re\grave{c}ue} + Q_{ced\acute{e}e} = 0$$

Chaleur cédée par l'eau liquide = $m_1 c_\ell (T_f - T_1)$

Chaleur reçue par la glace = $m_2 x_g \Delta_f h$

L'équilibre final étant solide-liquide, $T_f = 0^\circ\text{C}$. Ainsi :

$$m_1 c_\ell (0 - 20) + m_2 x_g \Delta_f h = 0$$

$$\Delta_f h = \frac{m_1 c_\ell \times 20}{m_2 x_g} \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta_f h = 327,84 \text{ J kg}^{-1}$$

2.2 Équation d'état de l'eau liquide

2.1 Coefficient de compressibilité isotherme de l'air

Pour un gaz parfait, l'équation d'état est $PV = nRT$. Le coefficient de compressibilité isotherme est défini par :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Pour un gaz parfait :

$$V = \frac{nRT}{P} \implies \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{nRT}{P^2} = -\frac{V}{P}$$

Donc :

$$\chi_T^{\text{air}} = \frac{1}{P}$$

Application numérique:

À $T_0 = 293 \text{ K}$ et $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$:

$$\chi_T^{\text{air}} = 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$$

Comparaison avec l'eau ($\chi_T^{\text{eau}} = 4,4 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$) :

$$\frac{\chi_T^{\text{air}}}{\chi_T^{\text{eau}}} = \frac{10^{-5}}{4,4 \times 10^{-10}} \implies \frac{\chi_T^{\text{air}}}{\chi_T^{\text{eau}}} \approx 22727$$

L'air est environ 22700 fois plus compressible que l'eau.

Variation de pression pour $\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = 1\%$ à T_0 constante :

$$\Delta P = \frac{|\Delta V/V|}{\chi_T}$$

♦ Eau :

$$\Delta P_{\text{eau}} = \frac{0.01}{4,4 \times 10^{-10}} \approx 2,27 \times 10^7 \text{ Pa} \implies \Delta P_{\text{eau}} = 227 \text{ bar}$$

♦ Air :

$$\Delta P_{\text{air}} = \frac{0.01}{10^{-5}} = 1000 \text{ Pa} \implies \Delta P_{\text{air}} = 0.01 \text{ bar}$$

Conclusion:

L'eau est très peu compressible. Pour obtenir une variation relative de volume de 1%, il faut appliquer une pression 22 700 fois plus élevée que pour l'air.

2.2 Expression du volume massique à température constante

Par définition du coefficient de compressibilité isotherme :

$$\chi_T = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \implies \frac{\partial v}{\partial P} = -\chi_T v$$

Séparation des variables :

$$\frac{dv}{v} = -\chi_T dP$$

Intégration entre (P_0, v_0) et (P, v) :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = -\chi_T \int_{P_0}^P dP'$$

$$\ln \left(\frac{v}{v_0} \right) = -\chi_T (P - P_0)$$

$$v(P) = v_0 \exp(-\chi_T (P - P_0))$$

2.3 Volume massique sous haute pression

Application numérique:

$$v_f = 9,570 \times 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

Commentaire

Sous 1000 bar, le volume massique ne diminue que de 4,3% ($\Delta v/v_0 = -4.3\%$). Ce résultat confirme la faible compressibilité de l'eau, même sous pressions extrêmes.

2.4 Expression approchée et dérivée

Pour $\chi_T (P - P_0) \ll 1$, développement limité de l'exponentielle :

$$v(P) \approx v_0 [1 - \chi_T (P - P_0)]$$

Dérivée partielle :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T \approx -v_0 \chi_T$$

Justification :

La dérivée de l'approximation linéaire est constante et égale à la valeur exacte à $P = P_0$:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial P} \right|_{P_0} = -\chi_T v_0$$

2.5 Expression à pression constante

Par définition du coefficient de dilatation isobare :

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \implies \frac{\partial v}{\partial T} = \alpha v$$

Séparation des variables :

$$\frac{dv}{v} = \alpha dT$$

Intégration entre (T_0, v_0) et (T, v) :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = \alpha \int_{T_0}^T dT'$$

$$\ln \left(\frac{v}{v_0} \right) = \alpha(T - T_0) \implies v(T) = v_0 \exp(\alpha(T - T_0))$$

2.6 Expression approchée et dérivée

Pour $\alpha(T - T_0) \ll 1$, développement limité :

$$v(T) \approx v_0 [1 + \alpha(T - T_0)]$$

Dérivée partielle donne :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P \approx v_0 \alpha$$

Justification :

La dérivée de l'approximation linéaire est constante et égale à la valeur exacte à $T = T_0$:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial T} \right|_{T_0} = \alpha v_0$$

2.7 Différentielle du volume massique donne :

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP$$

2.8 Il en résulte que :

$$\frac{dv}{v} = \alpha dT - \chi_T dP$$

2.9 L'intégration entre l'état de référence (T_0, P_0, v_0) et (T, P, v) donne :

$$\int_{v_0}^v \frac{dv'}{v'} = \alpha \int_{T_0}^T dT' - \chi_T \int_{P_0}^P dP'$$

$$\ln \left(\frac{v}{v_0} \right) = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$$

$$\ln \frac{v}{v_0} = \alpha(T - T_0) - \chi_T(P - P_0)$$

2.10 Cas particulier

Si $\alpha = 0$ et $\chi_T = 0$:

$$\ln \frac{v}{v_0} = 0 \implies v = v_0 = \text{constante}$$

On retrouve l'équation d'état d'un fluide incompressible et indilatable.

2.3 Courbe de saturation de l'eau

3.1 Expression simplifiée de $\frac{dP_s}{dT}$

La formule de Clapeyron est :

$$\frac{dP_s(T)}{dT} = \frac{\Delta_v h(T)}{T(v_v - v_l)}$$

Avec les hypothèses :

- ▶ $v_v \gg v_l$ (volume massique de la vapeur \gg volume massique du liquide)
- ▶ Vapeur d'eau assimilée à un gaz parfait : $v_v = \frac{RT}{MP_s}$

On obtient :

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{\Delta_v h(T) \cdot M \cdot P_s}{RT^2}$$

3.2 Relation pour $\ln P_s(T)$

En substituant $\Delta_v h(T) = a - bT$:

$$\frac{1}{P_s} \frac{dP_s}{dT} = \frac{(a - bT)M}{RT^2}$$

Intégration :

$$\int \frac{dP_s}{P_s} = \frac{M}{R} \int \left(\frac{a}{T^2} - \frac{b}{T} \right) dT$$

$$\ln P_s = \frac{M}{R} \left(-\frac{a}{T} - b \ln T \right) + Cte$$

$$\ln P_s(T) = Cte - \frac{aM}{RT} - \frac{bM}{R} \ln T$$

Avec

$$\bullet a' = Cte \quad \bullet b' = \frac{aM}{R} \quad \bullet c' = \frac{bM}{R}$$

3.3 Cas où $\Delta_v h$ est constant

Si $b = 0$ (enthalpie indépendante de T) :

$$\ln P_s(T) = C' - \frac{aM}{RT}$$

Formule classique de Clausius-Clapeyron

3.4 Calcul de $\frac{dP_s}{dT}$ à $T = 373 \text{ K}$

Sachant que :

$$\diamond \Delta_v h(373) = a - bT \xrightarrow{\text{A.N}} \Delta_v h(373) = 2,248 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\diamond v_v = \frac{RT}{MP_s} \xrightarrow{\text{A.N}} v_v = 1.628 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\diamond v_l \approx 0,001 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \text{ (négligeable)}$$

Alors :

$$\frac{dP_s}{dT} = \frac{\Delta_v h}{T(v_v - v_l)} \implies \frac{dP_s}{dT} \approx 0,037 \text{ bar K}^{-1}$$

3.5 Sensibilité aux variations de pression

$$\frac{dT_{\text{éb}}}{dP} = \frac{1}{dP_s/dT} \xrightarrow{\text{A.N}} \frac{dT_{\text{éb}}}{dP} \approx 27 \text{ K bar}^{-1}$$

Pour une variation de pression de 0,05 bar :

$$\Delta T_{\text{éb}} \approx 27 \times 0,05 = 1.35 \text{ K}$$

Conclusion:

La température d'ébullition est modérément sensible aux variations courantes de pression atmosphérique.

3.6 Température d'ébullition à $P=0,8 \text{ bar}$

Formule de Clausius-Clapeyron simplifiée :

$$\ln \frac{P_2}{P_1} = -\frac{\Delta_v h M}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)$$

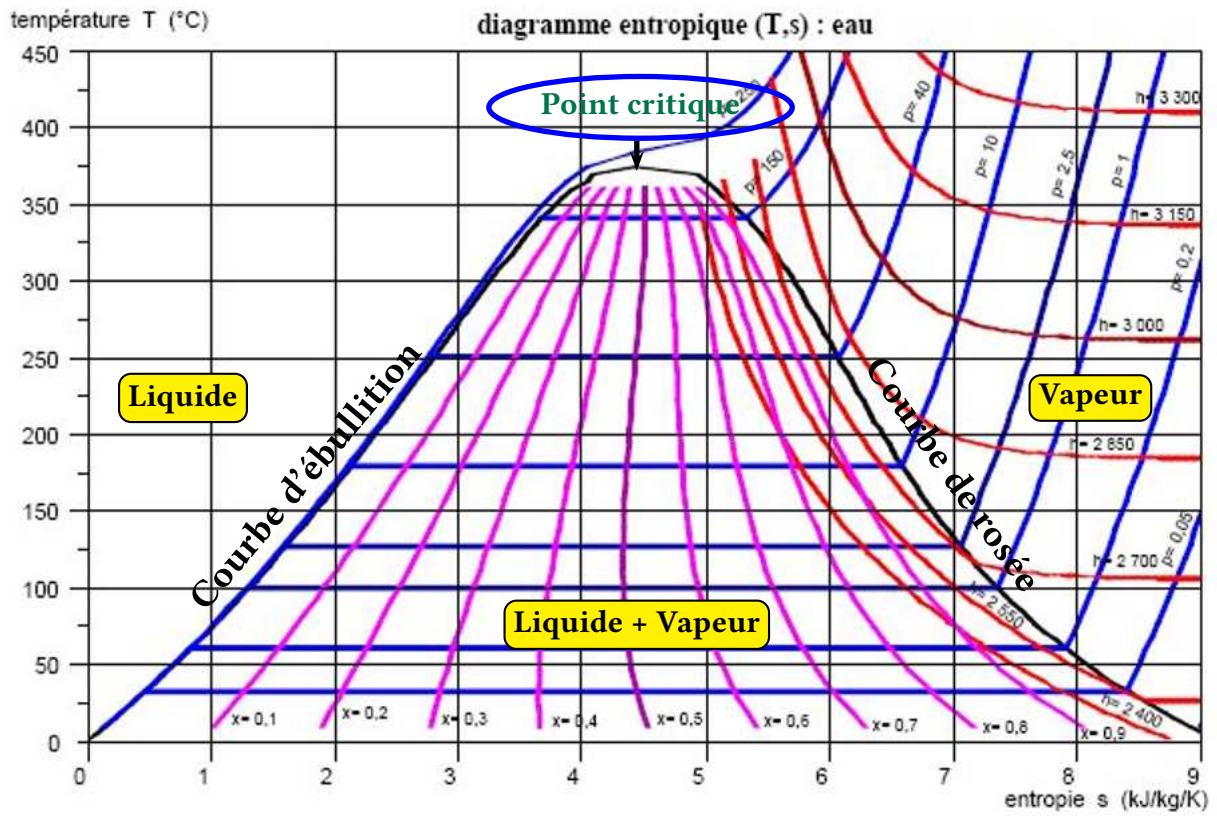
Avec $P_1 = 1 \text{ bar}$, $T_1 = 373 \text{ K}$, $P_2 = 0.8 \text{ bar}$, $\Delta_v h = 2.248 \times 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ **Application numérique:**

$$T_2 \approx 367 \text{ K} = 94^\circ \text{C}$$

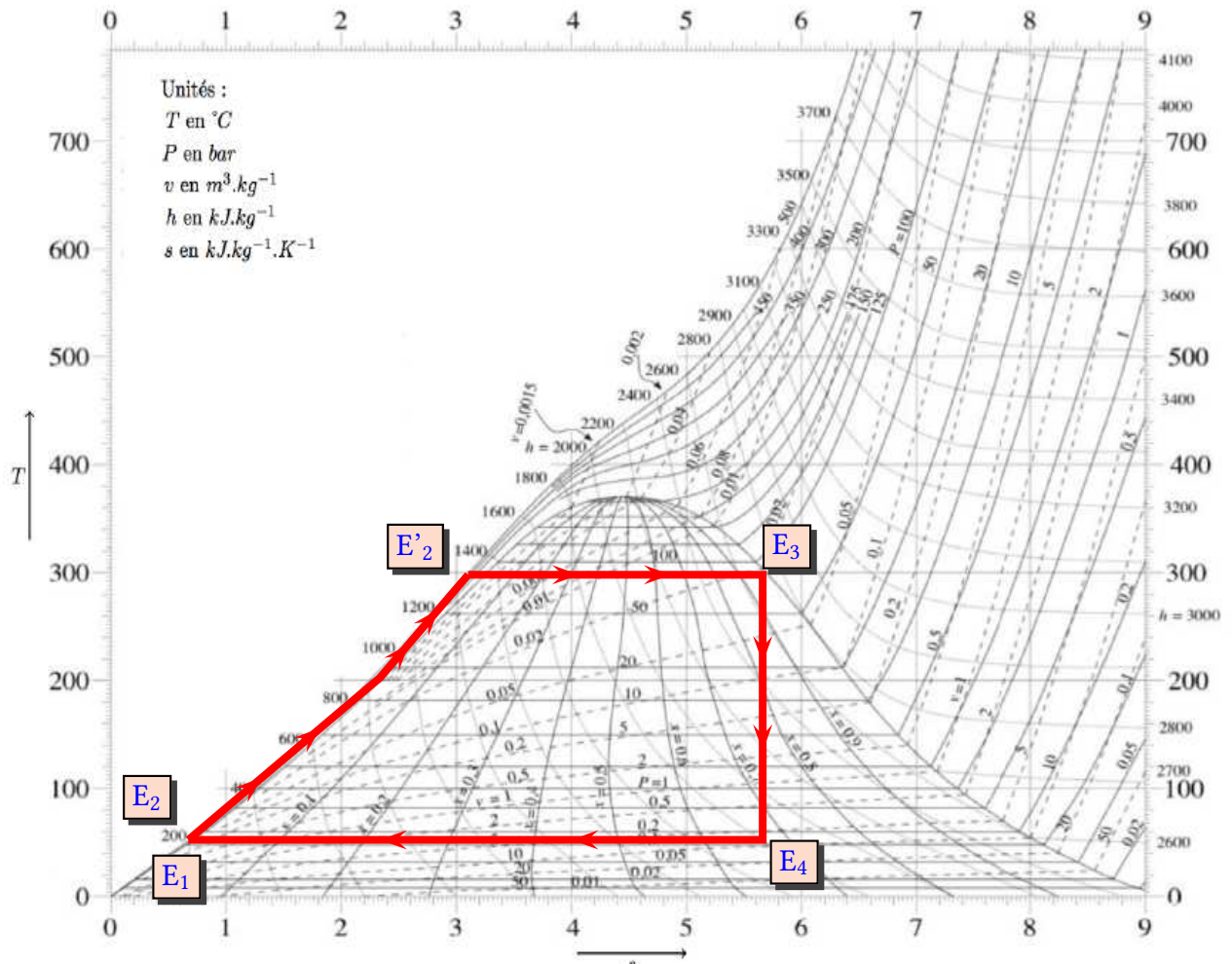
La température d'ébullition à 0,8 bar est 94°C

2.4 Centrale à vapeur d'eau

4.1 Diagramme (T,s)



4.2 Représentation du cycle



Annexe : Diagramme (T, s) de l'eau (À rendre avec le cahier de composition)

C'est un cycle **moteur** (le cycle est décrit dans le sens horaire) :

- ◆ Le fluide reçoit de la chaleur à haute température ($E'_2 \rightarrow E_3$)
- ◆ Il cède de la chaleur à basse température ($E'_4 \rightarrow E_1$)
- ◆ Le travail produit par la turbine est supérieur au travail consommé par la pompe.

4.3 Confusion E_1/E_2 et différence des états

Pourquoi peut-on les confondre sur le diagramme ?

Dans la zone liquide, les isobares sont quasiment confondues car l'eau est très peu compressible. La transformation $E_1 \rightarrow E_2$ est isentropique mais entraîne une très faible variation de température.

Pourquoi les états sont différents ?

Bien que proches sur le diagramme, E_1 et E_2 ont des pressions différentes :

- E_1 : liquide saturant à $P_1 = 0,1$ bar
- E_2 : liquide comprimé à $P_2 = 100$ bars

4.4 Deux principes de la thermodynamique

Pour un fluide en écoulement stationnaire :

Premier principe :

$$\Delta h + \frac{1}{2}\Delta c^2 + g\Delta z = q + w$$

(avec Δc^2 et $g\Delta z$ négligés)

Second principe :

$$\Delta s = s_{\text{créée}} + \int \frac{\delta q}{T}$$

Pour une transformation réversible :

$$s_{\text{créée}} = 0$$

4.5 Tableau des états :

État	P (bar)	T (°C)	h (kJ·kg ⁻¹)
E_1	0,1	50	200
E_2	100	50	200
E'_2	100	300	1400
E_3	100	300	2700
E'_4	0,1	50	1800

4.6 Transfert thermique massique q_c

$$q_c = h_3 - h_{2'} \xrightarrow{\text{A.N}} q_c = 2700 - 1400 = 1300 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

4.7 Travail massique w_r dans la turbine

$$w_r = h_{4'} - h_3 \xrightarrow{\text{A.N}} w_r = 1800 - 2700 = -900 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Signe négatif : travail fourni par le fluide

4.8 Travail massique w_p à la pompe

$$w_p = h_2 - h_1 \xrightarrow{\text{A.N}} w_p = 202 - 192 = 10 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Négligeable devant les autres énergies (< 1%)

4.9 Transfert thermique q_f

$$q_f = h_1 - h_{4'} \xrightarrow{\text{A.N}} q_f = 200 - 1800 = -1600 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

4.10 Rendement η

$$\eta = \frac{|w_r| - |w_p|}{q_c} \xrightarrow{\text{A.N}} \eta = \frac{900}{2500} = 0,36$$

$$\eta = 36\%$$

4.11 Débit massique

Puissance mécanique : $P = 250 \text{ MW} = 250 \times 10^3 \text{ kJ}\cdot\text{s}^{-1}$

Travail net massique :

$$w_{\text{net}} = |w_r| - |w_p| = 900 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

Débit massique :

$$\dot{m} = \frac{P}{w_{\text{net}}} = \frac{250 \times 10^3}{900} = 278 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

4.12 Comparaison avec Carnot

Rendement de Carnot :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} \xrightarrow{\text{A.N}} \eta_c = 1 - \frac{286}{573} = 0,501$$

$$\eta_c = 50\%$$

Le rendement réel (71.3%) est supérieur au rendement de Carnot (50.1%), ce qui est **impossible**. Cela indique une erreur dans les calculs ou hypothèses.

Correction :

Le rendement doit être calculé sur toute la chaleur apportée :

$$q_{\text{in}} = h_3 - h_2 = 2725 - 202 = 2523 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$$

$$\eta = \frac{w_{\text{net}}}{q_{\text{in}}} = \frac{939}{2523} = 0.372$$

$$\eta = 37.2\% < \eta_c = 50.1\%$$