- *On veillera à une présentation et une rédaction claires et soignées des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références des questions abordées.*
- *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur ou un oubli dans l'énoncé, il le signale clairement dans sa copie et poursuit sa composition en indiquant clairement les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*
- *Toutes les réponses devront être très soigneusement justifiées.*
- *Si un résultat donné par l'énoncé est non démontré, il peut néanmoins être admis pour les questions suivantes. Ainsi, les diverses parties de l'épreuve sont relativement indépendantes entre elles.*

Ce sujet a pour objectif l'étude de quelques propriétés thermodynamiques de l'eau et son utilisation dans une machine à vapeur.

*Le sujet est composé de deux parties totalement indépendantes. La partie 1 est notée sur **4 points**, la partie 2 sur **16 points**.*

Partie 1

La compressibilité de l'eau de mer

On considère un bassin océanique calme que l'on modélise par une couche unique d'eau immobile, de profondeur H. L'eau du bassin constitue un liquide homogène, isotherme, de température $T_e = 20\ °C$, de masse volumique ρ, en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = g\overrightarrow{e_z}$ uniforme, d'intensité $g = 9{,}81\ \text{m.s}^{-2}$.

On suppose que le référentiel d'étude, lié au bassin, est galiléen. L'axe Oz du repère $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ est descendant et la référence $z = 0$ des profondeurs d'eau est choisie à la surface du bassin (figure 1).

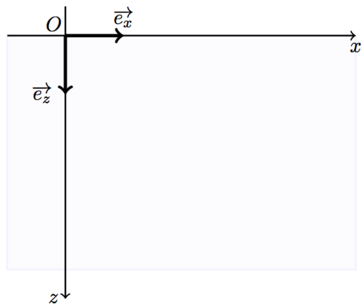


Figure 1 : Bassin océanique

On admet que la pression dans le fluide ne dépend que de la profondeur z et on s'intéresse à l'évolution de la pression $P(z)$ dans le bassin océanique. On note $P(z=0) = P_0 = 1 bar$ la pression atmosphérique à la surface libre du bassin.

On rappelle l'équation fondamentale de la statique des fluides : $-\overrightarrow{grad}\left(P(M)\right) + \rho(M)\vec{g}(M) = \vec{0}$.

1. On suppose dans cette question l'eau du bassin incompressible, $\rho = \rho_0 = 1{,}025.10^3 kg.m^{-3}$.

1.1. Montrer que la pression $P(z)$ de l'eau en un point de profondeur z est donnée par $P(z) = P_0 + \rho_0 g z$.

1.2. Représenter graphiquement l'allure de la courbe $P(z)$.

1.3. Quelle est la valeur numérique de la pente de la droite $P(z)$? La règle des plongeurs "1 bar tous les 10 mètres" est-elle valable ?

2. On suppose dans cette question l'eau du bassin compressible. La masse volumique de l'eau du bassin varie avec la pression selon la loi $\rho = \rho_0\left[1 + a\left(P - P_0\right)\right]$, où $a = 10^{-10} Pa^{-1}$. Pour $z = 0$, $\rho = \rho_0 = 1{,}025.10^3 kg.m^{-3}$ à la température $T_e = 20\ °C$.

2.1. Déterminer la loi de variation de la pression $P(z)$ en un point de profondeur z.

2.2. Que devient cette loi pour de faibles profondeurs ? Commenter.

2.3. Calculer les pressions P_c (pour l'eau compressible) et P_{inc} ((pour l'eau incompressible)) pour les profondeurs $z_1 = 10m$, $z_2 = 100m$ et $z_3 = 1km$. Quelle est l'erreur relative commise pour la profondeur $z_3 = 1km$ en utilisant l'expression approchée de la pression ? Conclure.

Partie 2

Données :

- Masse molaire de l'eau : $M_e = 18.g.mol^{-1}$;
- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c_l = 4{,}18kJ.kg^{-1}.K^{-1}$;
- Capacité thermique massique de la glace : $c_g = 2{,}06kJ.kg^{-1}.K^{-1}$;
- Température de fusion de l'eau sous pression atmosphérique : $T_{fus} = 0{,}00°C$;
- Pression de vapeur saturante de l'eau à la température $T = 100°C$: $P_s = 1{,}00bar$;
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31J.K^{-1}mol^{-1}$;
- $1\ bar = 1{,}013.10^5\ Pa$;
- Enthalpie massique de vaporisation de l'eau : $\Delta_v h(T) = a - bT$, avec $a = 3{,}33.10^6 J.kg^{-1}$ et $b = 2{,}9.10^3 J.kg^{-1}.K^{-1}$;
- Formule de CLAPEYRON donnant la pression de vapeur saturante $P_s(T)$ de l'eau : $\dfrac{dP_s(T)}{dT} = \dfrac{\Delta_v h(T)}{T\left(v_v - v_l\right)}$;
- Coefficient de dilatation à pression constante : $\alpha = \dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial T}\right)_P$;
- Coefficient de compressibilité isotherme : $\chi_T = -\dfrac{1}{V}\left(\dfrac{\partial V}{\partial P}\right)_T$;
- La vapeur d'eau sèche et saturante sera considérée comme un gaz parfait.
- On désigne par T la température, par P la pression, par V le volume, et par v le volume massique ;
- De manière générale, nous utilisons l'indice v pour la vapeur d'eau, et l'indice l pour l'eau liquide.

1. Diagramme d'état de l'eau

On s'intéresse dans cette partie à quelques aspects du changement d'état de l'eau, corps pur. La figure 2 donne le diagramme d'état de l'eau en coordonnées (P,T).

1.1. Reproduire le diagramme d'état de l'eau et faire apparaître les phases. Que représentent les courbes (C_1), (C_2) et (C_3) ?

1.2. Faire apparaître également le point triple et le point critique. Indiquer ce que représentent ces points.

1.3. On considère une quantité d'eau vapeur sous la pression initiale $P_i = 5.10^{-3} bar$ et à la température initiale $T_i = 0{,}00°C$. On comprime progressivement de façon isotherme cette masse jusqu'à la pression $P_f = 2bar$. Décrire les phénomènes observés et justifier la présence de deux paliers sur l'isotherme T_i. Tracer l'allure de la courbe donnant la pression pour cette transformation en fonction du temps.

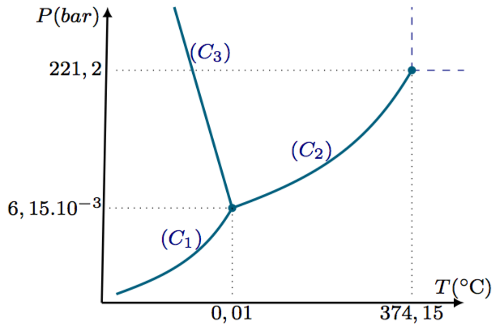


Figure 2 : Diagramme d'état de l'eau en coordonnées (P,T).

1.4. Dans un calorimètre aux parois calorifugées et de capacité thermique négligeable, on place une masse $m_1 = 1{,}00kg$ d'eau liquide à la température $T_1 = 20{,}0°C$ et une masse $m_2 = 0{,}50kg$ de glace à la température $T_2 = 0{,}00°C$. On suppose que la transformation du mélange se fait à pression constante $P_{atm} = 1bar$ et on néglige les pertes thermiques du calorimètre. Sachant qu'à l'état final, le système est en équilibre solide-liquide après la fusion de la fraction de glace $x_g = 0{,}51$, déterminer l'enthalpie massique de fusion de l'eau, $\Delta_f h(T_2)$, à la température T_2.

2. Équation d'état de l'eau liquide

Une quantité d'eau liquide, sous une pression et à une température, homogènes, présente des coefficients de dilatation isobare α et de compressibilité isotherme χ_T constants dans le domaine de température et de pression que l'on envisage dans cette partie. Dans ce domaine et autour de l'état 0, ces coefficients valent : $\alpha = 3{,}0.10^{-4} K^{-1}$ et $\chi_T = 4{,}4.10^{-10} Pa^{-1}$. Le volume massique de l'eau, à la température $T_0 = 20°C$ et sous la pression $P_0 = 1bar$, dans cet état, vaut $v_0 = 10^{-3} m^3.kg^{-1}$.

2.1. Exprimer le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T(air)$ de l'air assimilé à un gaz parfait. Comparer la valeur de χ_T de l'eau à celle de l'air dans les mêmes conditions caractérisées par la température T_0 et la pression P_0. Calculer la variation de pression ΔP nécessaire pour créer dans chaque cas, à la température constante T_0, une variation relative de volume de 1% ? Conclure.

2.2. Montrer que, à température constante T_0, le volume massique de l'eau liquide v s'écrit :

$$v(P) = v_0 \exp\left(-\chi_T \left(P - P_0\right)\right)$$

2.3. Calculer le volume massique v_f de l'eau liquide sous la pression $P = 1000bar$ et à la température $T_0 = 293K$. Commenter le résultat obtenu.

2.4. Proposer, en justifiant la réponse, une expression approchée du volume massique de l'eau liquide en fonction de P. Montrer que l'on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial P}\right)_T \approx -v_0 \chi_T$$

2.5. Montrer que, à pression constante P_0, le volume massique de l'eau liquide v s'écrit :

$$v(T) = v_0 \exp\left(\alpha\left(T - T_0\right)\right)$$

2.6. Proposer, en justifiant la réponse, une expression approchée du volume massique de l'eau liquide en fonction de T. Montrer que l'on peut écrire :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \approx v_0\alpha$$

2.7. Donner l'expression de la différentielle dv du volume massique en fonction de dP et dT.

2.8. Réécrire l'expression de dv en fonction des coefficients de dilatation isobare et de compressibilité isotherme, de v_0, ainsi que de dP et dT.

2.9. Montrer alors que, l'équation d'état $v = v(T,P)$ de l'eau peut s'écrire sous la forme :

$$Ln\frac{v}{v_0} = \alpha\left(T - T_0\right) - \chi_T\left(P - P_0\right)$$

2.10. Quelle équation d'état particulière retrouve-t-on pour des valeurs de α et χ_T nulles ?

3. Courbe de saturation de l'eau

On souhaite obtenir l'expression de la pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température. On considère une enceinte diatherme de volume V initialement vide dans laquelle on introduit de l'eau. On se place à des températures très inférieures à la température du point critique. Dans l'enceinte, et lorsque l'équilibre thermodynamique liquide-vapeur est réalisé, on pourra négliger le volume massique d'eau liquide devant celui de la vapeur d'eau.

L'ensemble est maintenu sous la pression $P = 1bar$ à la température $T = 100°C$.

3.1. Déterminer, à partir de la formule de CLAPEYRON, une expression simplifiée de $\dfrac{dP_s(T)}{dT}$.

3.2. Montrer que dans cette condition, la pression de vapeur saturante $P_s(T)$ est liée à la température T par une relation de la forme :

$$\ln P_s(T) = a' - \frac{b'}{T} - c'\ln T$$

où a', b' et c' sont des constantes que l'on exprimera en fonction des données.

3.3. Que devient cette expression si l'on peut négliger la dépendance de l'enthalpie massique de vaporisation avec la température ?

3.4. Calculer $\dfrac{dP_s(T)}{dT}$ à la température $T = 373K$.

3.5. La température d'ébullition de l'eau est-elle sensible aux variations de pression atmosphérique de la vie courante ?

3.6. Calculer la température d'ébullition de l'eau à une pression atmosphérique $P_a = 0{,}8bar$.

4. Centrale à vapeur d'eau

Dans une centrale à vapeur d'eau fonctionnant en régime permanent (figure 3), une masse $m = 1kg$ d'eau de capacité thermique massique constante c, de volume massique v, décrit un cycle idéal réversible en subissant les transformations thermodynamiques suivantes :

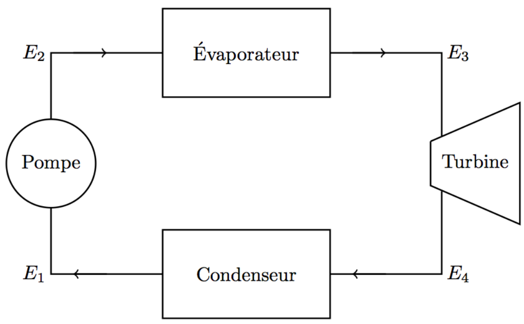


Figure 3 : Schéma d'une centrale à vapeur d'eau.

- $E_1 \to E_2$: La pompe porte l'eau liquide saturante de la basse pression $P_1 = 0{,}1\ bar$ du condenseur (état E_1) à la haute pression $P_2 = 100\ bars$ de l'évaporateur de façon isentropique (état E_2). Au point E_2, la température est T_2.

- $E_2 \rightarrow E_2^{'} \rightarrow E_3$: Dans l'évaporateur isobare, l'eau en contact avec la chambre de combustion est chauffée à la pression P_2 jusqu'à la température T_3 du changement d'état (état $E_2^{'}$), puis subit une vaporisation isobare à P_2 jusqu'à obtention de la vapeur saturée (état E_3).
- $E_3 \rightarrow E_4$: Dans la turbine, l'eau vapeur saturante subit une détente isentropique de la pression P_2 à la pression P_1 (état E_4).
- $E_4 \rightarrow E_1$: Dans le condenseur isobare, l'eau en contact avec un circuit d'eau froide, subit une condensation totale à la pression P_1 jusqu'à l'état de liquide saturant (état E_1).

Le document donné en **annexe (à rendre avec le cahier de composition)** représente le diagramme température-entropie massique, (T,s), d'une masse $m = 1kg$ d'eau pure. Sur ce diagramme figurent : réseau d'isotitres en vapeur ($x_v = cste < 1$), réseau d'isenthalpes et un réseau d'isobares, confondus avec les isothermes dans le domaine d'équilibre liquide-vapeur, et enfin un réseau d'isochores.

L'eau liquide est très peu compressible, au-dessus de la courbe d'ébullition, les isobares sont quasiment confondues. On pourra alors confondre les points E_1 et E_2.

On négligera le travail consommé par la pompe devant les autres énergies mises en jeu et on supposera que le système fonctionne en régime permanent conservatif et que les variations d'énergies potentielle et cinétique sont négligées.

4.1. Préciser sur le diagramme (T,s), la courbe de rosée, la courbe d'ébullition, le point critique, la zone liquide, la zone vapeur et la zone diphasique.

4.2. Représenter le cycle $E_1E_2E_2^{'}E_3E_4E_1$ dans le diagramme (T,s). Dire, en le justifiant s'il s'agit d'un cycle moteur ou d'un cycle récepteur ?

4.3. En observant les courbes isobares du diagramme (T,s), expliquer pourquoi on peut admettre que le point E_1 est pratiquement confondu avec le point E_2 sur ce diagramme. Pourquoi les états E_1 et E_2 sont différents ?

4.4. Rappeler l'expression des deux principes de la thermodynamique pour un fluide en écoulement stationnaire.

4.5. En utilisant le diagramme $(T,\ s)$, déterminer la pression P, la température T et l'enthalpie massique h des états E_1, E_2, $E_2^{'}$, E_3 et E_4, et porter les résultats dans un tableau.

4.6. Calculer le transfert thermique massique q_C échangé entre l'état $E_2^{'}$ et l'état E_3.

4.7. Calculer le travail massique reçu w_t par l'eau de l'état E_3 et l'état E_4 dans la turbine. Commenter son signe.

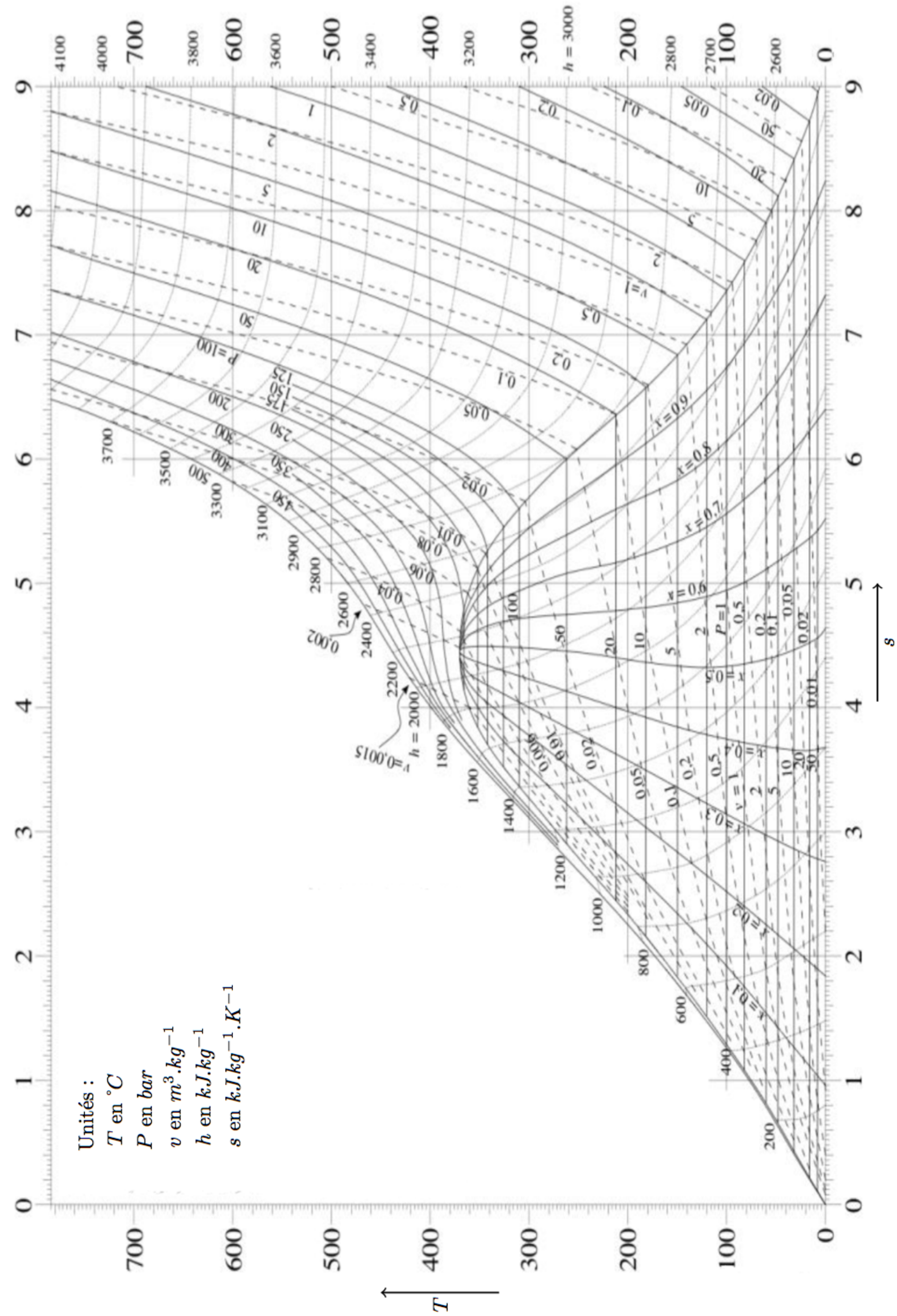
4.8. Calculer le travail massique reçu w_p par l'eau à la pompe. Conclusion.

4.9. Calculer le transfert thermique massique q_F reçu par l'eau lors du transfert thermique avec la source froide.

4.10. Définir le rendement η du cycle en fonction des énergies échangées. Calculer η.

4.11. Quel doit être le débit massique de l'eau nécessaire pour avoir une centrale thermique délivrant une puissance mécanique $P = 250MW$.

4.12. Comparer au rendement η_C de CARNOT, en supposant que l'eau se trouve à une température moyenne $T_C = 300°C$, alors que l'eau du circuit de refroidissement est à la température $T_F = 13°C$.



Annexe : Diagramme (T, s) de l'eau (À rendre avec le cahier de composition)